

TEORI MATEMATIKA DASAR

Nasruddin, S.Pd., M.Si.
Junaedi, S.Pd., M.Pd.
Dr. Molli Wahyuni, S.Si, M.Pd.
Dr. Edy Saputra, M.Pd.
Melkior Wewe, M.Pd.
Dr. Rahmy Zulmaulida, M.Pd
Lisa, S.Si., M.Pd.
La Ode Asmin, S.Si., M.Sc.

Editor:
Dr. Abdul Wahab, S.Si., M.Si.



TEORI MATEMATIKA DASAR

Penulis:

Nasruddin, S.Pd., M.Si; Junaedi, S.Pd., M.Pd. Dr. Molli Wahyuni, S.Si, M.Pd;
Dr. Edy Saputra, M.Pd; Melkior Wewe, M.Pd; Dr. Rahmy Zulmaulida, M.Pd;
Lisa, S.Si., M.Pd. La Ode Asmin, S.Si., M.Sc.

Editor:

Dr. Abdul Wahab, S.Si., M.Si.

Penyunting:

Nanda Saputra, M.Pd.

Desain Sampul dan Tata Letak

Atika Kumala Dewi

ISBN: 978-623-5722-55-9

Cetakan: Juni 2021

Ukuran: A5 (14 x 20 cm)

Halaman: viii, 118 Lembar

Penerbit:

Yayasan Penerbit Muhammad Zaini
Anggota IKAPI (026/DIA/2012)

Redaksi:

Jalan Kompleks Pelajar Tijue
Desa Baroh Kec. Pidie
Kab. Pidie Provinsi Aceh
No. Hp: 085277711539
Email: penerbitzaini101@gmail.com
Website: <http://penerbitzaini.com>

Hak Cipta 2021 @ Yayasan Penerbit Muhammad Zaini

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Penerbit atau Penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, segala puji dan syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan buku Teori Matematika Dasar ini. *Bookchapter* ini merupakan buku kolaborasi yang dituliskan oleh beberapa dosen yang bergabung dalam Asosiasi Dosen Kolaborasi Lintas Perguruan Tinggi.

Adapun *bookchapter* ini tidak akan selesai tanpa bantuan, diskusi dan dorongan serta motivasi dari beberapa pihak, walaupun tidak dapat disebutkan satu persatu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebanyak-banyaknya.

Ahirnya, penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Dengan demikian, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan serta perkembangan lebih lanjut pada *bookchapter* ini.

Wassalamu'alaikumsalam, Wr.Wb.

Tim Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI.....	v
BAB I	
SISTEM BILANGAN REAL.....	1
A. Pengertian Bilangan Real.....	1
B. Sistem Bilangan Real	3
C. Operasi Bilangan Real	4
D. Sifat-sifat Bilangan Real.....	7
E. Macam-Macam Bilangan Real.....	9
BAB II	
PERSAMAAN LINEAR.....	11
A. Pengertian Persamaan.....	11
B. Penjumlahan dan Perkalian	12
C. Persamaan Ekuivalen	13
D. Persamaan Pecahan	14
E. Harga Mutlak.....	15
BAB III	
NILAI MUTLAK.....	19
A. Definisi Nilai Mutlak	19
B. Teorema dan Akibat Nilai Mutlak	21

BAB IV	
PERSAMAAN GARIS LURUS.....	29
A. Pengertian Persamaan Garis Lurus.....	29
B. Gradien	34
C. Menentukan Persamaan Garis Lurus	44
BAB V	
SISTEM PERSAMAAN LINEAR.....	49
A. Sistem Persamaan Linier	49
B. Persamaan Kuadrat.....	51
C. Persamaan Dua Variabel.....	54
D. Penerapan Sistem Linier, Kuadrat dan Dua Variabel.....	58
BAB VI	
RELASI DAN FUNGSI	65
A. Relasi	65
B. Fungsi.....	73
BAB VII	
LIMIT FUNGSI.....	79
A. Pengertian Limit Fungsi.....	79
B. Sifat-Sifat Limit Fungsi.....	79
C. Menentukan Nilai Limit Fungsi Aljabar.....	80
D. Limit Fungsi Trigonometri.....	87
BAB VIII	
TURUNAN DAN APLIKASINYA.....	93
A. Definisi Turunan.....	93
B. Notasi Turunan	94
C. Aturan – Aturan Turunan	94

D.	Turunan Fungsi Trigonometri, Eksponensial, dan Logaritma	98
E.	Turunan Invers.....	99
F.	Turunan Implisit.....	99
G.	Titik Kritis	100
H.	Fungsi Naik dan Fungsi Turun.....	101
I.	Maksimum Lokal dan Minimum Lokal	102
J.	Uji Turunan Pertama untuk Lokal Maksimum dan Lokal Minimum	103
K.	Penggunaan Turunan Kedua	105
L.	Nilai Maksimum dan Minimum Absolut.....	107
M.	Persoalan Maksimal dan Minimal	109
N.	Latihan	111
	DAFTAR PUSTAKA	112
	BIODATA PENULIS.....	114

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL

Nasruddin, S.Pd., M.Si.
Universitas Sembilanbelas November Kolaka

A. Pengertian Bilangan Real

Bilangan real berasal dari bahasa Inggris yaitu “*real*” biasa juga disebut dengan bilangan riil yang merupakan sistem bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk desimal. Bilangan desimal adalah bilangan dengan basis 10, yang terdiri dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Setiap bilangan real dapat dikenali sebagai titik pada garis dengan satuan panjang atau garis bilangan. Misalnya, bilangan pada penggaris adalah bilangan real karena dapat dikenali sebagai garis lanjutan pada penggaris. Bilangan real juga disebut dengan bilangan riil yang dinotasikan dengan simbol R . Selain itu, bilangan real dapat juga diartikan sebagai gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional.

Bilangan real atau bilangan asli dalam matematika adalah bilangan yang dapat disusun menjadi bentuk desimal, misalnya 2.4871773339 ... atau 3.25678. Bilangan real meliputi bilangan rasional, misalnya 33 dan $-23/129$, dan bilangan irasional, seperti π . Bilangan real juga dapat di representasikan sebagai titik pada garis digital. Standar modern matematika murni saat ini tidak cukup ketat untuk deskripsi bilangan real ini.

Salah satu kemajuan matematika yang terpenting pada abad ke-19 adalah penemuan definisi yang cukup ketat dari bilangan real dan kesadaran bahwa diperlukan definisi yang lebih tinggi. Definisi aksiomatik standar saat ini menyatakan bahwa bilangan real membentuk bidang Archimedes unik, yang sepenuhnya teratur $(R; +, \cdot, <)$.

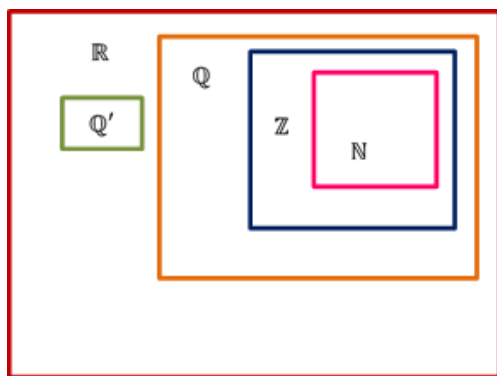
Berikut ini kami berikan contoh bilangan real yakni sebagai berikut.

1. $-3,123$ dibaca minus tiga koma satu dua tiga
2. $-34,13$ dibaca minus tiga puluh empat koma satu tiga
3. -1 dibaca minus satu
4. 0
5. 1
6. 23
7. $12,6$ dibaca dua belas koma enam
8. $\frac{1}{2}=0,5$ dibaca nol koma lima
9. $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$ dibaca satu koma empat satu empat dua dan seterusnya
10. $e=2,718281\dots$ disebut konstanta euler
11. $\pi = 3,141592 \dots$ disebut konstanta phi
12. $76\%=0.76$
13. $\sin 60^\circ = 0,866$

Terlihat semua angka tersebut dibentuk dari angka berbasis 10 (desimal).

B. Sistem Bilangan Real

Sistem bilangan real adalah himpunan bilangan real yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi aksioma tertentu, ini merupakan semesta pembicaraan dalam kalkulus. Sedangkan himpunan bilangan real adalah gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional. Berikut adalah diagram Venn dari himpunan bilangan real:



Gambar 1 Himpunan Bilangan Real

Keterangan:

- $\mathbb{R}$: bilangan real
- $\mathbb{Q}$: bilangan rasional
- $\mathbb{Q}'$: bilangan irasional
- $\mathbb{Z}$: bilangan bulat
- $\mathbb{N}$: bilangan asli

Berdasarkan definisi, himpunan bilangan real terdiri dari dua himpunan besar, yaitu:

1. Himpunan bilangan rasional: himpunan bilangan hasil bagi bilangan bulat (pecahan).

Contoh: $\frac{3}{4}, \frac{16}{2}, -\frac{7}{13}$

2. Himpunan bilangan irasional: himpunan bilangan yang tidak dapat dibentuk pecahan.

Contoh: $\sqrt{2}, \log 3, \pi$

Ciri lain dari himpunan bilangan irasional adalah bentuk desimal tak hingga, tetapi bukan desimal tak hingga yang berulang, karena desimal tak hingga berulang dapat diubah kedalam pecahan.

Contoh:

1. $0,33333333... = \frac{1}{3}$

2. $0,77777777... = \frac{7}{9}$

C. Operasi Bilangan Real

Dalam Operasi bilangan, ada beberapa aturan penting yang harus kita pahami, misalkan hukum komutatif, hukum asosiatif, hukum distributif dan hukum invers. Berikut ini kami berikan penjelasan aturan mendasar pada operasi bilangan real.

1. Operasi mendasar pada operasi bilangan
 - a. Hukum komutatif: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
 - b. Hukum asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$
 - c. Hukum distribusi: $x(y + z) = xy + xz$
 - d. Elemen-elemen identitas:

Terhadap penjumlahan: 0 sebab $x + 0 = x$

Terhadap perkalian: 1 sebab $x \cdot 1 = x$

e. Invers (balikan):

Setiap bilangan real x mempunyai invers sditif (biasanya disebut juga negatif) yang memenuhi $x + (-x) = 0$ dan setiap bilangan real x yang tidak nol mempunyai invers multiplikatif (disebut juga balikan) yaitu x^{-1} yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

2. Penjumlahan

a. Komutatif : $a + b = b + a$

Contoh :

1) $5p + 6q = 6q + 5p$

2) $7 + 4 = 4 + 7 = 11$

b. Asosiatif : $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$

Contoh :

1) $4x + 6y + 4z = 4x + (6y + 4z) = (4x + 6y) + 4z$

2) $4 + 5 + 1 = 4 + (5 + 1) = (4 + 5) + 1 = 10$

3. Pengurangan

Sifat-sifat pengurangan dan perluasannya dalam praktek perhitungannya diperoleh aturan sebagai berikut :

a. $a - b - c = a - (b + c)$

b. $a - b + c = a - (b - c)$

c. $-a - b - c = -(a + b + c)$

Contoh :

Sederhanakan :

$$7(3a - 4b + c) - 5(5b + 3c) + 5a$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} & 7(3a - 4b + c) - 5(5b + 3c) + 5a \\ &= (21a - 28b + 7c) - (25b + 15c) = 5a \\ &= 21a - 28b + 7c - 25b - 15c + 5a \\ &= 21a + 5a - 28b - 25b + 7c - 15c \\ &= 26a - 53b + 8c \end{aligned}$$

4. Perkalian

a. Komutatif : $a \times b = b \times a$

Contoh :

$$1) \quad 4a \times 5b = 5b \times 4a = 20ab$$

$$2) \quad 5 \times 6 = 6 \times 5 = 30$$

b. Asosiatif: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Contoh :

$$1) \quad (3q \times 4t) \times p = 3q \times (4tp)$$

$$2) \quad (2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = 30$$

c. Distributif : $a \times (b+c) = ab+ac$

Contoh :

$$1) \quad 3p \times (3t + 5q) = 9pt + 15pq$$

$$2) \quad 2 \times (5 + 6) = 10 + 12 = 22$$

Beberapa perkalian penting :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

5. Pembagian

Sifat-sifat pembagian:

- a. $a \times (b:c) = (a \times b) \text{ atau } a \times b = \frac{axb}{c}$
- b. $\frac{axb}{pxq} = \frac{a}{p} \times \frac{b}{q}$
- c. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{axc}{b}$
- d. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{pa}{pb}$
- e. $\frac{a+b}{p} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p}$

D. Sifat-sifat Bilangan Real

1. Sifat-sifat Medan

Jika x, y, z adalah anggota bilangan real, maka berlaku sifat-sifat medan sebagai berikut:

- a. Sifat komutatif penjumlahan
 $x + y = y + x$
- b. Sifat asosiatif penjumlahan
 $(x + y) + z = x + (y + z)$
- c. Sifat distributif kiri
 $x(y + z) = xy + xz$
- d. Sifat distributif kanan
 $(x + y)z = xz + yz$
- e. Elemen identitas penjumlahan
Ada 0 anggota himpunan bilangan real, sehingga $x + 0 = x$
- f. Sifat invers penjumlahan
Untuk setiap $x \in R$, ada $(-x)$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

- g. Sifat komutatif perkalian

$$xy = yx$$

- h. Sifat asosiatif perkalian

$$(xy)z = x(yz)$$

- i. Elemen identitas perkalian

Ada 1 anggota himpunan bilangan real, sehingga

$$x \cdot 1 = x$$

- j. Sifat invers perkalian

Untuk setiap $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ada $\left(\frac{1}{x}\right)$, sedemikian sehingga

$$x \left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

2. Sifat-sifat Urutan

- a. Trikotomi

Jika x dan y adalah bilangan real, maka pasti berlaku salah satu $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.

- b. Transitif

$$x < y \text{ dan } y < z \text{ maka } x < z$$

$$x > y \text{ dan } y > z \text{ maka } x > z$$

$$x = y \text{ dan } y = z \text{ maka } x = z$$

- c. Penjumlahan

$$x < y \leftrightarrow x + z < y + z$$

$$x > y \leftrightarrow x + z > y + z$$

$$x = y \leftrightarrow x + z = y + z$$

- d. Perkalian

Jika z bilangan positif:

$$x < y \leftrightarrow xz < yz$$

$$x > y \leftrightarrow xz > yz$$

$$x = y \leftrightarrow xz = yz$$

Jika z bilangan negatif:

$$x < y \leftrightarrow xz < yz$$

$$x > y \leftrightarrow xz > yz$$

$$x = y \leftrightarrow xz = yz$$

E. Macam-Macam Bilangan Real

Matematika tidak bisa lepas dari istilah bilangan. Ada banyak bilangan yang dapat digunakan dalam mengoperasikan matematika atau dalam melakukan perhitungan matematika. Dalam sistem bilangan pada ilmu Matematika, bilangan real terdiri dari 2 sistem bilangan yaitu bilangan Rasional dan bilangan Irasional.

1. Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat diubah menjadi pecahan biasa (a/b) dengan syarat $b \neq 0$ dan apabila bilangan ini diubah ke pecahan desimal, maka angkanya akan berhenti di suatu bilangan tertentu. Apabila tidak berhenti, maka akan membentuk pola pengulangan. Bilangan rasional juga memiliki batasan yaitu terdapat pada selang $(-\infty, \infty)$.

Contoh:

a. $\frac{1}{2} = 0,5$

b. $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$

Bilangan-bilangan rasional seperti $\frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{11}, \dots, \frac{a}{b}, \dots$ disebut bilangan-bilangan rasional pecahan biasa atau sering disebut sebagai pecahan biasa.

Bilangan-bilangan rasional seperti $2\frac{1}{2}, \frac{476}{3}, \frac{75}{6}, 23\frac{1}{8}, \dots, C\frac{a}{b}$ disebut bilangan-bilangan rasional pecahan sempurna atau sering juga disebut pecahan campuran

2. Bilangan Irasional

Berbeda dengan bilangan rasional, bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat diubah ke pecahan biasa dan apabila bilangan ini diubah ke pecahan desimal, maka angkanya tidak akan berhenti dan tidak memiliki pola tertentu.

Conto:

a. $\pi = 3,141592653589\dots$

b. $\sqrt{7} = 2,64575131106\dots$

BAB II

PERSAMAAN LINEAR

Junaedi, S.Pd., M.Pd

IAI Darud Da'wah Wal-Irsyad Polewali Mandar

A. Pengertian Persamaan

Persamaan adalah kalimat matematika terbuka yang menyatakan hubungan tanda “=” (Susila.N, 2001)

Menurut (Sukirman, 2017) Dasar suatu persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda “=” (*dibaca sama dengan*). Hal yang tak diketahui dalam sebuah persamaan disebut variabel. Sedangkan persamaan yang memuat variabel berpangkat satu disebut persamaan linear.

- Bentuk umum

$$Ax + b = c$$

dengan a, b , dan c adalah konstanta $a \neq 0$, atau

$$Ax = b$$

Contoh 2.1

1. $x = 6$
2. $2x + 4 = 12$
3. $4x + 1 = 2x + 17$

Sebuah penyelesaian dari suatu persamaan berupa bilangan yang jika disubstitusikan pada variabel yang menghasilkan sebuah pernyataan yang benar. (Sukirman, 2017)

Definisi

Sebuah penyelesaian untuk suatu persamaan adalah sembarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan itu kita substitusikan pada variabel.

Contoh 2.2

1. $6x = 42$, persamaan ini mempunyai penyelesaian bilangan 7, sebab $6(7) = 42$ adalah benar. Bilangan -9 bukan sebuah penyelesaian dari $6x = 42$, sebab $6(-9) = 42$ adalah salah.
2. $4z + 7 = 3z + 10$ jika kita selesaikan persamaan ini mempunyai penyelesaian 3 sebab $4(3) + 7 = 3(3) + 10$

B. Penjumlahan dan Perkalian

Dalam menyelesaikan bermacam-macam persamaan terdapat dua prinsip. (Sukirman, 2017)

1. Prinsip penjumlahan

Untuk sebarang bilangan real a, b , dan c jika $a = b$ maka

$$a + c = b + c$$

$$a - c = b - c$$

2. Prinsip perkalian

Untuk sebarang bilangan real a, b , dan c , jika $a = b$ maka

$$a \times c = b \times c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \text{ benar, dengan } c \neq 0$$

Contoh 2.3

Selesaikanlah $4x + 13 = 29$

Penyelesaian

$$4x + 13 = 29$$

$$4x + 13 + (-13) = 29 + (-13) \text{ menggunakan prinsip penjumlahan (kedua ruas kita tambahkan dengan } -13)$$

$$4x = 16$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)4x = \left(\frac{1}{4}\right)16 \text{ menggunakan prinsip perkalian, kedua ruas kita kalikan dengan } \frac{1}{4}$$

$$x = 4$$

Contoh 2.4

$$\text{Selesaikan } 3(y-1)-1 = 2-5(y+5)$$

Penyelesaian

$$3(y-1) - 1 = 2 - 5(y+5)$$

$$3y - 3 - 1 = 2 - 5y - 25 \quad (\text{distribusi})$$

$$3y - 4 = -5y - 23$$

$$3y - 4 + 4 = -5y - 23 + 4 \quad \text{kedua ruas kita tambah } +4$$

$$3y = -5y - 19$$

$$3y + 5y = -19 + 5y - 5y \quad \text{kedua ruas kita tambah } 5y$$

$$8y = -19$$

$$\frac{1}{8} 8y = \frac{1}{8} -19$$

$$y = \frac{-19}{8}$$

C. Persamaan Ekuivalen

Persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama kita sebut persamaan ekuivalen (Sukirman, 2017)

Contoh 2.5

$$x = 2$$

$$2x = 4$$

$$2x + 4 = 8$$

Ketiga persamaan diatas ekuivalen karena himpunan penyelesaiannya sama, yaitu $\{x|x=2\}$

D. Persamaan Pecahan

Menurut (Sukirman, 2017) Persamaan yang memuat ungkapan pecahan kita namakan persamaan pecahan. Dalam menyelesaikan suatu persamaan pecahan menggunakan perkalian dengan variabel.

Contoh 2.6

$$\frac{M-2}{5} + \frac{M}{3} = \frac{1}{5}$$

$$15\left(\frac{M-2}{5} + \frac{M}{3}\right) = 15\left(\frac{1}{5}\right), \text{ kedua ruas kita kalikan dengan 15}$$

$$15\left(\frac{M-2}{5}\right) + 15\left(\frac{M}{3}\right) = 3 \text{ distribusi perkalian terhadap penjumlahan}$$

$$3M - 6 + 5M = 3$$

$$8M - 6 = 3$$

$$8M - 6 + 6 = 3 + 6 \text{ kedua ruas kita tambah dengan 6}$$

$$8M = 9$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)8M = \left(\frac{1}{8}\right)9 \text{ kedua ruas kita kalikan dengan } \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$M = \frac{9}{8}$$

Contoh 2.7.

$$\text{Selesaikan } \frac{x+4}{x+5} = \frac{-1}{x+5}$$

Penyelesaian :

$$(x + 5) = \left(\frac{x + 4}{x + 5}\right) = (x + 5) \left(\frac{-1}{x + 5}\right) \text{ kedua ruas kita kalikan dengan } (x + 5)$$

$$x + 4 = -1$$

$$x + 4 + (-4) = -1 + (-4) \text{ kedua ruas kita tambah dengan } -4$$

$$x = -5$$

E. Harga Mutlak

Menurut (Sukirman, 2017) Harga mutlak dari sebuah bilangan selalu bernilai positif atau nol. Harga mutlak dari sebuah bilangan real x , kita tulis $|x|$, untuk

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 2.8.

1. $|34| = 34$
2. $|-15| = -(-15) = 15$
3. $|0| = 0$

Contoh 2.9

$$\text{selesaikan } |x-2| = 3$$

penyelesaian:

$$|x-2| = 3$$

$$x - 2 = 3 \text{ atau } x - 2 = -3$$

Masing masing persamaan merupakan bagian dari

penyelesaian:

$$\begin{array}{ll} x - 2 = 3 & \text{atau} \quad x - 2 = 3 \\ x - 2 + 3 = 3 + 2 & \text{atau} \quad x - 2 + = -3 + 2 \\ X = 5 \dots (I) & \text{atau} \quad X = -1 \dots (II) \end{array}$$

Persamaan I dan II semua memenuhi. Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{-1, 5\}$

Contoh 2.10

Selesaikan $|5x-7|=7x-5$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{ll} 5x-7 & = 7x-5 \quad \text{atau} \quad 5x-7 = (7x-5) \\ 5x-7x-7 & = 7x-7x-5 \quad \text{atau} \quad 5x-7 = 7x+5 \\ -2x-7+7 & = -5+7 \quad \text{atau} \quad 5x+7x-7 = -7x+7x+5 \\ -2x & = 2 \quad \text{atau} \quad 12x-7+7 = 5+7 \\ \left(\frac{1}{2}\right)2x & = \left(\frac{1}{2}\right)2 \quad \text{atau} \quad 12x = 12 \\ & \text{atau} \quad \left(\frac{1}{12}\right)12x = \left(\frac{1}{12}\right)12 \\ x & = 1 \dots (I) \quad \text{atau} \quad x = 1 \dots (II) \end{array}$$

Jadi, himpunan penyelesaian $\{-1, 1\}$

SOAL LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai Materi di atas kerjakanlah latihan berikut

1. Selesaikanlah $2z - (9z + 8) = (5 - 2z) - 3(2z - 3) + 29$
2. Selesaikanlah $\frac{1 + 1}{3} - \frac{t \sim 1}{2} = 1$
3. Tentukan himpunan penyelesaian soal soal berikut
 - a. $|3x| = 12$
 - b. $3|x - 3| = 9$
4. Hasil ketiga kali tes seorang siswa SD di Merauke Irian Jaya 87% , 64% , dan 78%
Berapakah skor tes yang ia dapatkan pada tes keempat agar rata ratanya 80%?
5. Salah satu sudut sebuah segitiga ukurannya lima kali lipat sudut pertama. Sedangkan sudut ketiga besarnya 2° kurang dari sudut pertama. Berapakah besar masing masing sudut segitiga tersebut?
6. Jumlah dua bilangan Bulat berurutan 35. Tentukan bilangan bulat itu!

BAB III

NILAI MUTLAK

Dr. Molli Wahyuni, S.Si, M.Pd.
Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai

Berdasarkan sifat trikotomi bilangan real disimpulkan bahwa bahwa jika $a \in \mathbf{R}$ dan $a \neq 0$ maka terdapat asatu bilangan dari a dan $-a$ yang positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan positif dari kedua bilangan tersebut.

A. Definisi Nilai Mutlak

Misalkan $a \in \mathbf{R}$. **Nilai mutlak** dari a , yang dilambangkan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jika } a \geq 0 \\ 0, & \text{jika } a = 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Contoh 1.

$$|3| = 3 \text{ dan } |-1| = 1$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak bahwa $|a| > 0$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ dan $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a=0$. Demikian juga halnya dengan $|-a| = |a|$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$.

Untuk lebih jelas dapat juga dilihat pada ilustrasi berikut.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jika } a \geq 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Atau

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jika } a > 0 \\ -a, & \text{jika } a \leq 0 \end{cases}$$

Dari definisi terlihat bahwa $|a| \geq 0$, $a \in \mathbf{R}$ dan $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$. Demikian juga $|-a| = |a|$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ karena

- jika $a > 0$ maka $-a < 0$ sehingga $|a| = a$ dan $|-a| = -(-a) = a$
- jika $a = 0$ maka $-a = 0$ sehingga $|a| = 0 = |-a|$
- jika $a < 0$ maka $-a > 0$ sehingga $|a| = -a$ dan $|-a| = -a$

Tiga poin yang dijelaskan tersebut dapat dituangkan ke dalam tabel sebagai berikut.

a	-a	 a 	 -a
>0	<0	a	$-(-a)=a$
0	0	0	0
<0	>0	$-a$	$-a$

Selanjutnya, sebuah bilangan real maksimum bernilai sama dengan nilai mutlaknya dan minimum bernilai sama dengan negatif nilai mutlaknya $-|a| \leq a \leq |a|$ yang interpretasinya dapat dilihat pada tabel berikut.

a	 a 	 -a 	Kesimpulan
> 0	$a; a > 0$	$-(-a) = a$	$- a < a = a $
0	0	0	$- a = a = a $
< 0	$a; a < 0$	$-a$	$- a = a < a $
			$- a = a < a $

B. Teorema dan Akibat Nilai Mutlak

1. Teorema tentang Sifat-sifat Nilai Mutlak

- $|ab| = |a| |b|$ untuk semua $a, b \in \mathbb{R}$
- $|ab|^2$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$
- Jika $c \geq 0$ kemudian $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$
- $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$

Bukti :

- $a = b = 0$, maka terbukti. Jika $a > 0, b > 0$ maka $ab > 0$, sehingga $|ab| = ab = |a||b|$. Jika $a > 0, b < 0$ maka $ab < 0$ sehingga $|ab| = -ab = a|-b| = |a||b|$. Jika $a < 0, b > 0$ maka $ab < 0$ sehingga $|ab| = -ab = |-a|b = |a||b|$. Jika $a < 0, b < 0$ maka $ab > 0$ sehingga $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$

Berdasarkan pembuktian tersebut dapat dituliskan konsep nilai mutlak pada tabel berikut.

a	b	 a 	 b 	ab	 ab 	 a b
>0	>0	a	b	>0	ab	ab
>0	0	a	0	0	0	0
>0	<0	a	$-b$	<0	$-ab$	$-ab$
0	>0	0	b	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0
0	<0	0	-b	0	0	0
<0	>0	-a	b	<0	ab	-ab
<0	0	-a	0	0	0	0
<0	<0	-a	-b	>0	-ab	ab

- b. Karena $a^2 \geq 0$ maka $a^2 = |a^2| = |a a| = |a||a| = |a|^2$

Atau berdasarkan definisi $|a|$:

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \rightarrow |a|^2 = a^2 \\ 0, a = 0 \rightarrow |a|^2 = 0^2 = a^2 \\ -a, a < 0 \rightarrow |a|^2 = (-a)^2 = a^2 \end{cases}$$

- c. Jika $c \geq 0$ maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$
 $\rightarrow$ akan ditunjukkan: $-c \leq a \leq c$ artinya ditunjukkan
 $-c \leq a$ dan $a \leq c$

Perhatikan :

$$|a| \leq c \begin{cases} a \leq c, \text{ jika } a > 0 \\ 0 < c, \text{ jika } a = 0 \\ -a \leq c, \text{ jika } a < 0 \end{cases}$$

$$-a \leq c$$

$$(-1)(-a) \geq (-1)(c)$$

$$a \geq -c$$

$$-c \leq a$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa
 bahwa : $-c \leq a$ dan $a \leq c$

Jika $|a| \leq c, c \geq 0$

$-c \leq a \leq c$ jika $|a| \leq c, c \geq 0$

$\leftarrow$ Akan ditunjukkan : jika $c \geq 0$ maka $|a| \leq c$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $a \leq c$ dan $-c \leq a \Leftrightarrow a \geq -c$

Maka $|a| \leq c$

d. $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

Seperti $|c|$ dengan memisalkan $c=|a|$

2. Teorema Ketaksamaan Segitiga

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka $|a + b| \leq |a| + |b|$

Bukti :

Ambil $a, b \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Dengan menunjukkan $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

atau $(-|a|) + (-|b|) < a + b < |a| + |b|$

dengan menggunakan teorema sifat nilai mutlak (poin c)

- $-|a| \leq a \leq |a|$, untuk semau $a \in \mathbb{R}$
- $-|b| \leq b \leq |b|$, untuk semau $b \in \mathbb{R}$
- $-|a| + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$
 $(-|a|) + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Dengan menggunakan teorema sifat nilai mutlak (poin d)

Untuk nilai $a \rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$

Untuk nilai $b \rightarrow -|b| \leq b \leq |b|$

$-|a + b| \leq a + b \leq |a + b|$ **terbukti**

Hal tersebut menunjukkan bahwa kesamaan yang terjadi dalam ketaksamaan segitiga jika dan hanya jika $ab > 0$, dimana ekuivalen dengan pernyataan bahwa a dan b memiliki tanda yang sama. Ada beberapa variasi dari ketaksamaan segitiga, diantaranya dinyatakan dalam poin akibat berikut.

3. Akibat

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka

- a. $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- b. $|a - b| \leq |a| + |b|$

Bukti

- a. Tulis $a = a - b + b$ dan masukkan ke dalam ketaksamaan segitiga sehingga

$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$. Kurangkan kedua ruas dengan $|b|$ sehingga diperoleh $|a| - |b| \leq |a - b|$. Gunakan cara yang sama untuk $b = b - a + a$ sehingga diperoleh $-|a - b| = -|-(b - a)| = -|b - a| \leq -(|b| - |a|) = |a| - |b|$.

Karena $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, maka dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

- b. Kemudian, ganti a pada ketaksamaan segitiga dengan $-b$ sehingga diperoleh $|a - b| \leq |a| + |-b|$. Karena $|-b| = |b|$, maka diperoleh $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

Soal dan Pembahasan

1. Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $|a| = \sqrt{a^2}$

Jawab.

Untuk sebarang bilangan real a , kita akan ditinjau tiga kasus.

- Jika $a > 0$, maka $\sqrt{a^2} = a = |a|$
- Jika $a = 0$, maka $\sqrt{a^2} = \sqrt{0} = 0 = |a|$
- Jika $a < 0$, maka $\sqrt{a^2} = -a = |a|$

Jika, $|a| = \sqrt{a^2}$

2. Jika $a, b \in \mathbf{R}$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Jawab.

Kita bisa menunjukkan dengan mudah dengan menggunakan sifat nilai mutlak bahwa $\left|\frac{a}{b}\right| |b| = \left|\frac{ab}{b}\right| = |a|$ sehingga $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Tetapi di sini kita hanya akan menggunakan definisi untuk semua kasus yang mungkin. Jelas untuk kasus

$$a = 0, \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{0}{b}\right| = |0| = \frac{0}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

- a. Kasus $a, b > 0$

$$\text{Diperoleh } |a| = a, |b| = b \text{ dan } \frac{a}{b} > 0 \text{ sehingga}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$$

- b. Kasus $a, b < 0$

$$\text{Diperoleh } |a| = -a, |b| = -b \text{ dan } \frac{a}{b} > 0 \text{ sehingga}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$$

- c. Kasus $a > 0, b < 0$

$$\text{Diperoleh } |a| = a, |b| = -b \text{ dan } \frac{a}{b} < 0 \text{ sehingga}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$$

- d. Kasus $a < 0, b > 0$

$$\text{Diperoleh } |a| = -a, |b| = b \text{ dan } \frac{a}{b} < 0 \text{ sehingga}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\text{Jadi, } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. Tunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ berlaku $|a + b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$.

Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$. Akan ditunjukkan

- Jika $|a + b| = |a| + |b|$, maka $ab \geq 0$.
 - Jika $ab \geq 0$, maka $|a + b| = |a| + |b|$.
- a. ($\Rightarrow$) Misalkan $|a + b| = |a| + |b|$.
 Andaikan tidak berlaku $ab \geq 0$.
 Hal ini berarti $ab < 0$ yang terjadi jika $a > 0, b < 0$
 atau $a < 0, b > 0$.

Jika $a > 0, b < 0$, maka $|a| = a, |b| = -b$ sehingga $|a| + |b| = a + (-b)$
 Jika $a < 0, b > 0$, maka $|a| = -a, |b| = b$ sehingga $|a| + |b| = -a + b$

Kontradiksi, karena keduanya tak sama dengan $|a + b|$ yang bernilai $a + b$
 atau $-(a + b)$.

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah berlaku $ab \geq 0$.

- b. ($\Leftarrow$) Misalkan $ab \geq 0$.

Ada tujuh kemungkinan nilai a dan b yang mungkin terjadi dan analisisnya seperti tabel berikut.

a	b	a	b	a+b	a+b	a + b
> 0	< 0	a	b	> 0	a + b	a + b
> 0	0	a	0	a > 0	a	a
0	> 0	0	b	b > 0	b	b
0	0	0	0	0	0	0
0	< 0	0	-b	b < 0	-b	-b
< 0	0	-a	0	a < 0	-a	-a
< 0	< 0	-a	-b	< 0	-(a + b)	(-a) + (-b)

Jadi, $|a+b|=|a|+|b|$.

4. Misalkan $a < b$. Buktikan $|a-b| < |x-b|$ jika dan hanya jika $x < \frac{a+b}{2}$.

Jawab.

Misalkan $a < b$ sehingga $b - a > 0$.

- a. $(\Rightarrow) |x-a| < |x-b|$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita peroleh $x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2$. Selanjutnya, diperoleh $2bx - 2ax < b^2 - a^2$ sehingga $2x(b-a) < (b+a)(b-a)$. Karena $b - a > 0$, maka $2x < b + a$ sehingga $x < \frac{a+b}{2}$.

- b. $(\Rightarrow)$ Misalkan $x < \frac{a+b}{2}$.

Andaikan tidak berlaku $|x - a| < |x - b|$. Artinya, $|x - a| \geq |x - b|$.

Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita peroleh $x^2 - 2ax + a^2 \geq x^2 - 2bx + b^2$. Selanjutnya, diperoleh $2bx - 2ax \geq b^2 - a^2$ sehingga $2x(b-a) \geq (b+a)(b-a)$. Karena $b - a > 0$, kita bagi kedua ruas dengan $(b - a)$ sehingga diperoleh $2x \geq b + a$ yang ekuivalen dengan $x \geq \frac{a+b}{2}$. Kontradiksi dengan $x < \frac{a+b}{2}$.

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $|x - a| < |x - b|$.

Jadi, jika $a < b$, maka $|x - a| < |x - b|$ jika dan hanya jika $x < \frac{a+b}{2}$.

5. Diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ untuk $x \in [2,3]$. Tentukan konstanta M sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2,3]$.

Diketahui $|f(x)| = \left| \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} \right| = \frac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|},$

$$\begin{aligned} |2x^2 - 3x + 1| &\leq |2x^2| + |-3x| + |1| \\ &= 2|x^2| + 3|x| + 1 \\ &\leq 2|3^2| + 3|3| + 1 \\ &= 28 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |2x - 1| &\geq ||2x| - |1|| \\ &\geq ||2(2)| - |1|| \\ &= 3 \end{aligned}$$

sehingga $|f(x)| = \left| \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} \right| \leq \frac{28}{3}$. Jadi, dengan mengambil $M = \frac{28}{3}$, di dapat $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in [2, 3]$.

BAB IV

PERSAMAAN GARIS LURUS

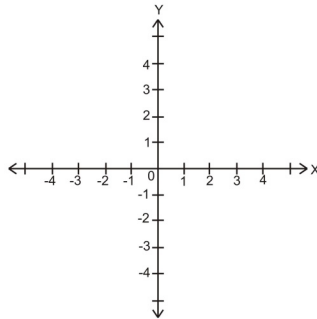
Edy Saputra, M.Pd.
IAIN Takengon

A. Pengertian Persamaan Garis Lurus

Persamaan garis lurus (PGL) adalah suatu fungsi yang apabila digambarkan ke dalam bidang koordinat cartesius, grafik tersebut akan berbentuk garis lurus. Persamaan Garis lurus yaitu suatu perbandingan antara koordinat y dan koordinat x dari dua titik yang terletak pada sebuah garis. Sedangkan garis lurus sendiri ialah kumpulan dari titik – titik yang sejajar. Dan garis lurus dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk. Karena persamaan garis lurus selalu digambarkan dalam koordinat cartesius maka perhatikanlah uraian berikut.

1. Koordinat Cartesius

Sistem koordinat cartesius ditemukan oleh ahli matematika asal Prancis bernama Rene Descartes pada abad ke-17. Dikutip dari buku *Get Success UASBN* oleh Heru Nugroho (2008), pada koordinat cartesius terdapat dua garis yang saling tegal lurus dan berpotongan pada sebuah titik yang disebut titik pangkal. Garis-garis ini kemudian disebut sumbu koordinat. Garis mendatar atau horizontal dikenal dengan sumbu x atau absis, sedangkan garis tegak atau vertikal disebut sumbu y atau ordinat. Suatu titik pada sistem koordinat kartesius digambarkan sebagai (x, y) .



Gambar 1 Bidang koordinat cartesius

Bidang datar pada gambar tersebut disebut bidang koordinat yang dibentuk oleh sumbu x dan y. Sedangkan titik perpotongan antara sumbu x dan sumbu y disebut pusat koordinat atau pangkal koordinat (titik O). Sumbu x dan y terbagi dalam sumbu x,y positif dan sumbu x,y negatif. Sumbu x positif adalah nilai-nilai x dari pusat koordinat O (0,0) ke arah kanan, sedangkan sumbu x negative ke arah kiri. Sementara itu, sumbu y positif yaitu nilai-nilai y dari pusat koordinat O (0,0) ke arah atas, dan untuk sumbu y negative ke arah bawah.

2. Menggambarkan Persamaan Garis Lurus

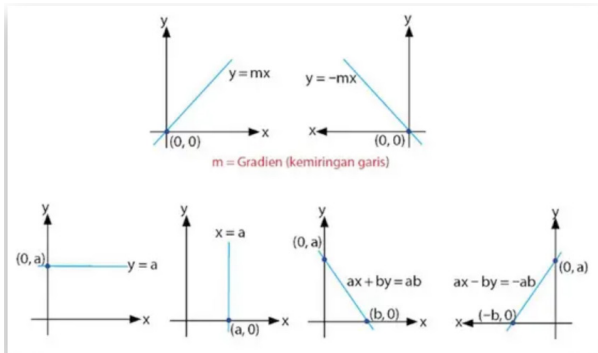
Persamaan Garis lurus atau PGL adalah persamaan linear yang mengandung satu atau dua variabel. Persamaan garis lurus dapat digambarkan dalam koordinat cartesius untuk mendapatkan grafik yang berbentuk garis lurus.

Dibawah ini beberapa contoh untuk menyatakan persamaan garis lurus, yaitu:

- $y = mx$
- $y = -mx$

- $y = a$
- $x = a$
- $ax + by = ab$
- $ax - by = -ab$
- dan lain-lain

Perhatikan beberapa contoh grafik dan bentuk garis lurus serta cara menyatakan atau menentukannya dari gambar berikut.



Gambar 2 Contoh grafik dan bentuk garis lurus

Inilah langkah-langkah untuk menggambarkan grafik garis tersebut.

- Menentukan dua titik yang dilalui oleh garis dalam persamaan tersebut.
- Kedua titik yang telah ditentukan ditempatkan pada koordinat cartesian.
- Menghubungkan kedua titik yang telah ditempatkan tersebut untuk menjadi sebuah garis.

Perhatikanlah contoh soal berikut.

Contoh Soal 1

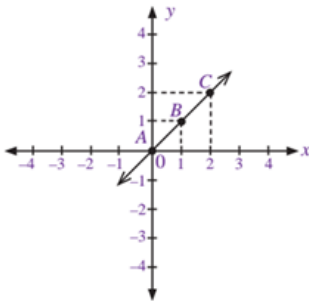
Tentukan apakah titik-titik berikut membentuk garis lurus atau tidak?

a. $A(0, 0), B(1, 1), C(2, 2)$

b. $G(-2, 1), H(1, 0), I(4, 3)$

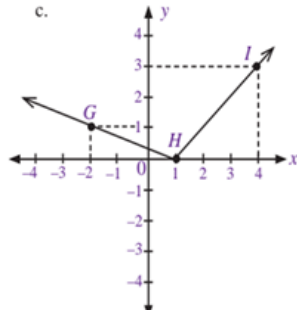
Jawab :

a.



Jadi, titik-titik A, B , dan C membentuk garis lurus.

b.



Jadi, titik-titik G, H , dan I tidak membentuk garis lurus.

Contoh Soal 2

Gambarlah garis dengan persamaan:

a. $x + y = 4$

b. $x = 2y$

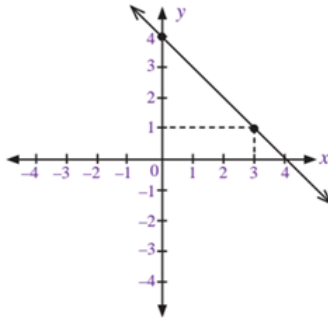
Jawab:

- a. Menentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x + y = 4$

Misalkan: $x = 0$, maka $0 + y = 4 \Rightarrow y = 4$; sehingga di peroleh titik koordinat $(0, 4)$.

$x = 3$, maka $3 + y = 4 \Rightarrow y=1$; sehingga diperoleh titik koordinat $(3, 1)$.

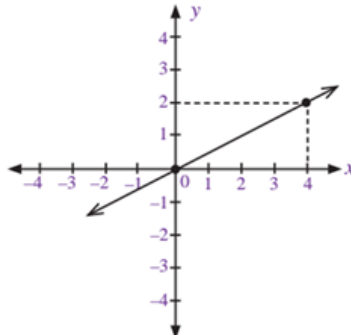
Kemudian, dari dua titik koordinat tersebut dapat digambarkan garis lurus sebagai berikut.



- b. Tentukan nilai x atau y yang memenuhi persamaan $x = 2y$

Misalkan: $x = 0$, maka $0 = 2y \Rightarrow y=0$; sehingga di peroleh titik koordinat $(0, 0)$.

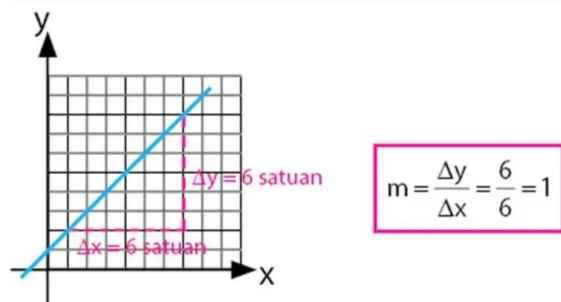
$x = 4$, maka $4 = 2y \Rightarrow y=2$; sehingga diperoleh titik koordinat $(4, 2)$.



B. Gradien

Gradien yaitu Perbandingan komponen y dan komponen x , atau disebut juga dengan kecondongan sebuah garis. Lambang dari suatu gradien yaitu huruf “m”. Gradien juga dapat dinyatakan sebagai nilai dari kemiringan suatu garis dan dapat dinyatakan dengan perbandingan $\Delta y/\Delta x$.

Perhatikan gambar dibawah ini untuk menentukan gradien pada sebuah persamaan garis berikut:



Gambar 3 Cara Menentukan Gradien

Kemudian coba perhatikan grafik berikut ini.

1. Menentukan Gradien

Ada berbagai cara untuk menghitung gradien dari suatu persamaan garis. Berikut ini akan diuraikan cara menghitung gradien berdasarkan titik koordinat atau bentuk persamaan garis.

a. Menghitung gradien pada persamaan garis $y = mx$

Gradien suatu garis dapat ditentukan melalui perbandingan antara ordinat dan absis sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

$$\left[\text{Gradien} = \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} \right]$$

$$\left[m = \frac{y}{x} \right] \text{ atau } [y = mx]$$

Dari uraian terlihat bahwa nilai gradient dalam suatu persamaan garis sama dengan besar nilai konstanta m yang terletak di depan variabel x , dengan syarat persamaan garis tersebut diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk $y = mx$.

Contoh Soal 3

Tentukanlah gradient dari persamaan garis berikut.

1) $2x + 3y = 0$

2) $4x - 6y = 0$

Jawab:

- 1) Persamaan garis $2x + 3y = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx$.

Sehingga, $2x + 3y = 0$

$$3y = -2x$$

$$y = \frac{-2x}{3}$$

$$y = \frac{-2}{3}x$$

Persamaan garis $y = \frac{-2}{3}x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $\frac{-2}{3}$.

- 2) Persamaan garis $4x - 6y = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx$.

Sehingga, $4x - 6y = 0$

$$6y = 4x$$

$$y = \frac{4x}{6}$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

Persamaan garis $y = \frac{2}{3}x$ sudah memenuhi bentuk $y = mx$. Jadi, diperoleh $\frac{2}{3}$.

b. Menghitung gradient pada persamaan garis $y = mx + c$

Perhitungan gradient pada garis $y = mx + c$ dilakukan dengan cara menentukan nilai konstanta di depan variabel x .

Contoh Soal 4

Tentukanlah gradient dari persamaan garis berikut.

1) $3y = 6 + 9x$ 2) $2 + 4y = 3x + 5$

Jawab:

- 1) Persamaan garis $3y = 6 + 9x$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$.

Sehingga,

$$3y = 6 + 9x$$

$$y = \frac{x+12}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

Jadi, nilai $= \frac{1}{2}$.

- 2) Persamaan garis $2 + 4y = 3x + 5$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$.

$$\text{Sehingga, } 2 + 4y = 3x + 5$$

$$4y = 3x + 5 - 2$$

$$4y = 3x + 3$$

$$y = \frac{3x+3}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$\text{Jadi, nilai } m = \frac{3}{4}.$$

c. Menghitung gradient pada persamaan garis $ax + by + c = 0$.

Gradient pada persamaan garis $ax + by + c = 0$ dapat ditentukan dengan cara mengubah terlebih dahulu persamaan garis tersebut ke dalam bentuk $y = mx + c$. Kemudian, nilai gradient diperoleh dari nilai konstanta m di depan variabel x .

Contoh soal 5

Tentukanlah gradient dari persamaan garis berikut.

1) $x + 2y + 6 = 0$

2) $2x - 3y - 8 = 0$

Jawab:

- 1) Persamaan garis $x + 2y + 6 = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$.

$$\text{Sehingga, } x + 2y + 6 = 0$$

$$2y = -x - 6$$

$$y = \frac{-x-6}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$\text{Jadi, nilai } m = -\frac{1}{2}.$$

- 2) Persamaan garis $2x - 3y - 8 = 0$ diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $y = mx + c$.

Sehingga, $2x - 3y - 8 = 0$

$$-3y = -2x + 8$$

$$3y = 2x - 8$$

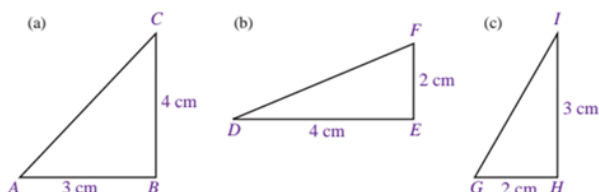
$$y = \frac{2x - 8}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

Jadi, nilai $m = \frac{2}{3}$.

d. Menghitung gradient pada garis yang melalui dua titik

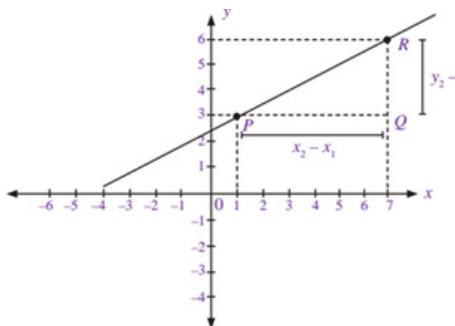
Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 4 Tiga buah segitiga

Dengan menggunakan perbandingan ordinat dan absis, gradient untuk masing-masing segitiga dapat dihitung sebagai berikut.

- Segitiga ABC $\rightarrow$ Gradien AC $= \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \frac{BC}{AB} = \frac{4 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{4}{3}$
- Segitiga DEF $\rightarrow$ Gradien DF $= \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \frac{EF}{DE} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$
- Segitiga GHI $\rightarrow$ Gradien GI $= \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} = \frac{HI}{GH} = \frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{3}{2}$



Gambar 5 Menentukan Gradien

Gambar tersebut menunjukkan sebuah garis lurus pada bidang koordinat yang melalui titik P dan R. Untuk mencari gradient garis tersebut, kamu tinggal menentukan gradient PR pada segitiga PQR. Dengan menggunakan perbandingan ordinat dan absis, akan diperoleh gradient garis yang melalui titik P dan R, yaitu:

$$\begin{aligned}
 \text{Gradien PR} &= \frac{\text{ordinat}}{\text{absis}} \\
 &= \frac{QR}{PQ} \\
 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{6 - 3}{7 - 1} \\
 &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Jadi, gradient garis yang melalui P (1, 3) dan R(7, 6) pada gambar diatas adalah $\frac{1}{2}$. Dari uraian tersebut diperoleh

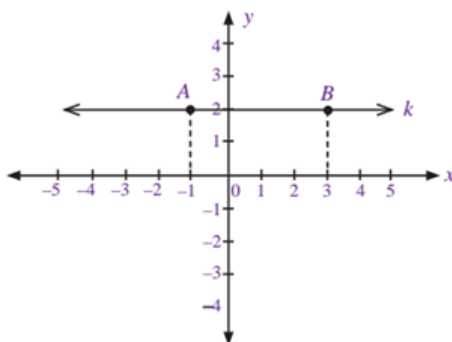
rumus umum untuk mencari gradient pada garis yang melalui dua titik, sebagai berikut.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Sifat-Sifat Gradien

a. Gradien yang sejajar dengan sumbu x

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 6 Garis yang melalui dua titik dan sejajar sumbu-x

Pada gambar tersebut terdapat garis k yang melalui titik $A(-1, 2)$ dan $B(3, 2)$. Garis tersebut sejajar dengan sumbu-x. Untuk menghitung gradient garis k , gunakan cara sebagai berikut.

Untuk titik $A(-1, 2)$ maka $x_1 = -1, y_1 = 2$.

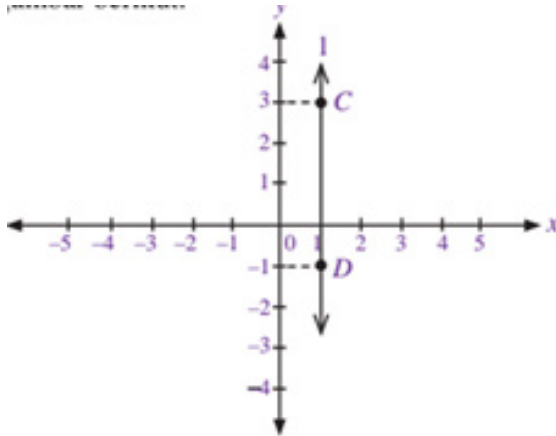
Untuk titik $B(3, 2)$ maka $x_2 = 3, y_2 = 2$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{3 - (-1)} = \frac{0}{4} = 0$$

“Jika garis sejajar dengan sumbu-x maka nilai gradiennya adalah nol.”

b. Gradien garis yang sejajar dengan sumbu-y

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 7 Garis l yang melalui titik C dan D dan sejajar sumbu-y

Pada gambar diatas, garis l yang melalui titik C (1, 3) dan D (1, -1) letaknya sejajar dengan sumbu-y. Gradien garis tersebut adalah sebagai berikut.

Untuk titik C (1, 3) maka $x_1 = 1, y_1 = 3$.

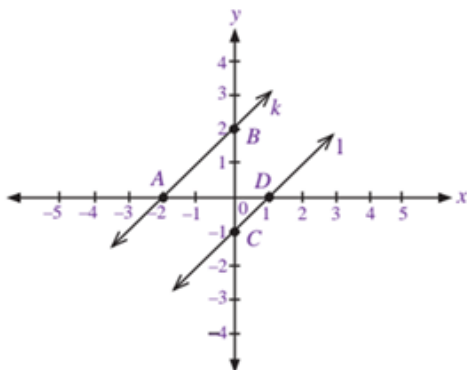
Untuk titik D (1, -1) maka $x_2 = 1, y_2 = -1$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{1 - 1} = \frac{-4}{0} = \sim$$

“Jika garis sejajar dengan sumbu-y maka garis tersebut tidak memiliki gradient.”

c. **Gradien dua garis yang sejajar**

Perhatikanlah gambar dibawah ini.



Gambar 8 Garis k dan l yang sejajar.

Garis k dan l merupakan dua garis yang sejajar. Perhatikan uraian berikut.

- Garis k melalui titik A $(-2, 0)$ dan B $(0, 2)$.

Untuk titik A $(-2, 0)$ maka $x_1 = -2, y_1 = 0$.

Untuk titik B $(0, 2)$ maka $x_2 = 0, y_2 = 2$.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

- Garis l melalui titik C $(0, -1)$ dan D $(1, 0)$.

Untuk titik C $(0, -1)$ maka $x_1 = 0, y_1 = -1$.

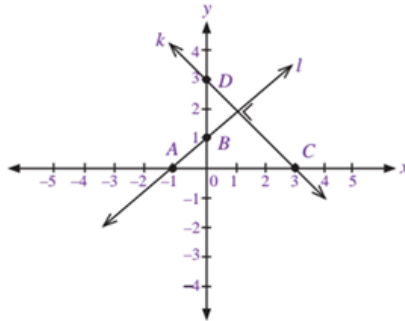
Untuk titik D $(1, 0)$ maka $x_2 = 1, y_2 = 0$.

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

“Setiap garis yang sejajar memiliki gradient yang sama.”

d. Gradien dua garis yang tegak lurus

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 9. Garis k dan l yang saling tegak lurus

Gradien kedua garis tersebut dapat dihitung dengan cara sebagai berikut.

- Garis k melalui titik $C(3, 0)$ dan $D(0, 3)$.

Untuk titik $C(3, 0)$ maka $x_1 = 3, y_1 = 0$.

Untuk titik $D(0, 3)$ maka $x_2 = 0, y_2 = 3$.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 - 3} = \frac{3}{-3} = -1$$

- Garis l melalui titik $A(-1, 0)$ dan $B(0, 1)$.

Untuk titik $A(-1, 0)$ maka $x_1 = -1, y_1 = 0$.

Untuk titik $B(0, 1)$ maka $x_2 = 0, y_2 = 1$.

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Hasil kali kedua gradient tersebut adalah

$$m_{AB} \times m_{CD} = 1 \times -1 = -1$$

“Hasil kali antara dua gradient dari garis yang saling tegak lurus adalah -1.”

C. Menentukan Persamaan Garis Lurus

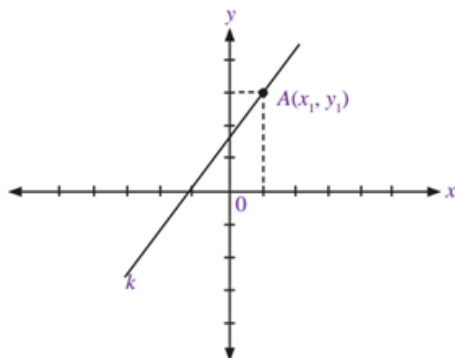
Adapun bentuk umum dari persamaan garis lurus dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y=mx+c$$

Persamaan garis ini hampir sama dengan bentuk sederhananya, namun diberi tambahan konstanta (diberi lambing c). Hal ini menunjukkan bahwa garis yang dibentuk oleh persamaan garis tersebut tidak akan melalui titik $O(0, 0)$.

1. Menentukan Persamaan Garis dari Gradien dan Titik Koordinat

Perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 10 Garis k yang melalui titik $A(x, y)$.

Perhatikanlah gambar diatas, gambar tersebut menunjukkan sebuah garis k pada bidang koordinat cartesius. Garis tersebut melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan tidak melalui titik pusat koordinat sehingga persamaan garis pada gambar dapat dituliskan:

$$y_1 = mx_1 + c \dots\dots (1)$$

Adapun bentuk persamaan garis yang tidak melalui titik pusat koordinat dituliskan:

$$y = mx + c \dots\dots (2)$$

Jika ditentukan selisih dari persamaan (2) dan persamaan (1) maka diperoleh:

$$y = mx + c$$

$$\underline{y_1 = mx_1 + c} \quad \underline{\quad}$$

$$y - y_1 = mx - mx_1 + c - c$$

$$y - y_1 = mx - mx_1$$

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Selanjutnya diperoleh rumus umum untuk menentukan persamaan garis jika diketahui gradient dan titik koordinat, yaitu:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Contoh Soal 6

Tentukan persamaan garis yang melalui titik P (3, 5) dan memiliki gradient -2.

Jawab:

Untuk titik P (3, 5) maka $x_1 = 3$, $y_1 = 5$.

Dengan menggunakan rumus umum, diperoleh persamaan garis:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 5 = -2 (x - 3)$$

$$y - 5 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 6 + 5$$

$$y = -2x + 11 \text{ atau } 2x + y - 11 = 0.$$

2. Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik

Coba kamu perhatikan uraian berikut:

- $y - y_1 = m(x - x_1)$ adalah rumus umum persamaan garis dari gradient dan titik koordinat.
- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ adalah rumus gradient dari dua titik koordinat.

Dari kedua rumus tersebut, dapat diuraikan sebagai berikut.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi rumus untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik koordinat adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh Soal 7

Tentukan persamaan garis yang melalui titik-titik koordinat A (3, 3) dan B(2, 1).

Jawab:

Untuk titik A (3, 3) maka $x_1 = 3$, $y_1 = 3$.

Untuk titik B (2, 1) maka $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

Persamaan yang diperoleh:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-3}{2-3}$$

$$\frac{y-3}{-2} = \frac{x-3}{-1}$$

$$-1(y-3) = -2(x-3)$$

$$-y+3 = -2x+6$$

$$2x-y+3-6=0$$

$$2x-y-3=0$$

Jadi persamaan garisnya adalah $2x-y-3=0$

BAB V

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Melkior Wewe, M.Pd.
STKIP Citra Bakti

A. Sistem Persamaan Linier

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan ini dikatakan linear sebab hubungan matematis ini dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam Sistem koordinat Kartesius.

Contoh grafik dari suatu persamaan linear dengan nilai $m=0,5$ dan $b=2$ (garis merah). Bentuk umum untuk persamaan linear adalah dalam hal ini, konstanta m akan menggambarkan gradien garis, dan konstanta b merupakan titik potong garis dengan sumbu- y . Persamaan lain, seperti x^3 , $y^{1/2}$, dan bukanlah persamaan linear.

Contoh

Contoh sistem persamaan linear dua variabel:

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear yang rumit, seperti di sebut di atas, bisa ditulis dengan menggunakan hukum aljabar agar menjadi bentuk yang lebih sederhana. Seperti contoh, huruf besar di persamaan merupakan konstanta, dan x dan y adalah variabelnya.

Bentuk Umum

Dimana konstanta A dan B bila dijumlahkan, hasilnya bukan angka nol. Konstanta dituliskan sebagai $A \geq 0$, seperti yang telah disepakati ahli matematika bahwa konstanta tidak boleh sama dengan nol. Grafik persamaan ini bila digambarkan, akan menghasilkan sebuah garis lurus dan setiap garis dituliskan dalam sebuah persamaan seperti yang tertera diatas. Bila $A \geq 0$, dan x sebagai titik potong, maka titik koordinat- x adalah ketika garis bersilangan dengan sumbu- x ($y = 0$) yang digambarkan dengan rumus $-c/a$. Bila $B \geq 0$, dan y sebagai titik potong, maka titik koordinat- y adalah ketika garis bersilangan dengan sumbu- y ($x = 0$), yang digambarkan dengan rumus $-c/b$.

Bentuk Standar

Di mana, a dan b jika dijumlahkan, tidak menghasilkan angka nol dan a bukanlah angka negatif. Bentuk standar ini dapat diubah ke bentuk umum, tapi tidak bisa diubah ke semua bentuk, apabila a dan b adalah nol.

Bentuk titik potong gradient

Sumbu- y

Dimana m merupakan gradien dari garis persamaan, dan titik koordinat y adalah persilangan dari sumbu- y . Ini dapat digambarkan dengan $x = 0$, yang memberikan nilai $y = b$. Persamaan ini digunakan untuk mencari sumbu- y , dimana telah diketahui nilai dari x . Y dalam rumus tersebut merupakan koordinat y yang anda taruh di grafik. Sedangkan X merupakan koordinat x yang anda taruh di grafik.

Sumbu-x

Dimana m merupakan gradien dari garis persamaan, dan c adalah titik potong- x , dan titik koordinat x adalah persilangan dari sumbu- x . Ini dapat digambarkan dengan $y = 0$, yang memberikan nilai $x = c$. Bentuk y/m dalam persamaan sendiri berarti bahwa membalikkan gradien dan mengalikannya dengan y . Persamaan ini tidak mencari titik koordinat x , dimana nilai y sudah diberikan.

B. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ dengan } a \neq 0 \text{ dan } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Perhatikan beberapa fungsi kuadrat berikut ini:

1. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$
2. $f(x) = 2x^2 + 3x$
3. $f(x) = x^2 - 4$

Jika semua fungsi kuadrat di atas bernilai nol, atau $f(x) = 0$, maka fungsi kuadrat tersebut menjadi

1. $3x^2 + 2x + 5 = 0$
2. $2x^2 + 3x = 0$
3. $x^2 - 4 = 0$

Fungsi kuadrat yang demikian disebut persamaan kuadrat. Contoh :

1. Persamaan kuadrat lengkap
 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ dan $x^2 - x - 1 = 0$

2. Persamaan kuadrat tidak lengkap

$$3x^2 + x = 0, x^2 - x = 0, \text{ dan } -x^2 - 25 = 0$$

1. Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, setelah difaktorkan, misalnya diperoleh

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\leftrightarrow x = x_1 \text{ atau } x = x_2$$

Dalam hal ini x_1 atau x_2 merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat di atas. Hal tersebut menggambarkan suatu ketentuan bahwa $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ dipenuhi oleh $x = x_1$ atau $x = x_2$

Contoh :

Tentukan penyelesaian sistem persamaan kuadrat $2x^2 + 6x = 0$ dengan memfaktorkan !

Penyelesaian :

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$\leftrightarrow 2x(x + 3) = 0$$

$$\leftrightarrow 2x = 0 \text{ atau } x + 3 = 0$$

$$\leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -3$$

Jadi penyelesaian persamaan tersebut adalah $x_1 = 0$ atau $x_2 = -3$.

2. Bentuk Kuadrat Sempurna

Contoh kuadrat sempurna dua pusat x antara lain x^2 , $4x^2$, $9x^2$, $16x^2$, $25x^2$, $(9x + 3)^2$ dan $(x - 4)^2$.

Selanjutnya kita pelajari cara menyelesaikan persamaan kuadrat yang dinyatakan dalam bentuk $(x + p)^2 = q$ dengan $q \geq 0$, yaitu persamaan kuadrat yang ruas kirinya merupakan kuadrat sempurna. Contoh :

$$\begin{aligned} \text{a. } x^2 - 9 &= 0 \\ \leftrightarrow x^2 &= 9 \\ \leftrightarrow x &= \pm \sqrt{9} \\ \leftrightarrow x &= \pm 3 \\ \leftrightarrow x &= 3 \text{ atau } x = -3 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian persamaan tersebut adalah $x_1 = 3$ atau $x_2 = -3$

3. Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Menggunakan Rumus

Rumus penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{R}$, dengan $b^2 - 4ac \geq 0$ Rumus ini disebut rumus abc.

Catatan:

Sebelum memakai rumus abc, persamaan kuadrat harus dinyatakan dalam bentuk baku yaitu: $ax^2 + bx + c = 0$, jika $b^2 - 4ac < 0$, maka tidak ada penyelesaian untuk $ax^2 + bx + c = 0$.

Contoh:

Dengan menggunakan rumus abc tentukan penyelesaian dari $x^2 - x - 6 = 0$, dengan x peubah pada bilangan real !

Penyelesaian:

$$x^2 - x - 6$$

$$a = 1, b = 1, c = -6$$

atau

Jadi $x_1 = -3$ atau $x_2 = 2$

Catatan :

- a. Jika nilai $b^2 - 4ac > 0$ maka x memiliki dua nilai real yang berlainan
- b. Jika nilai $b^2 - 4ac = 0$ maka x memiliki satu nilai real
- c. Jika nilai $b^2 - 4ac < 0$ maka x tidak memiliki nilai real.

C. Persamaan Dua Variabel

Sebelum mempelajari Persamaan Dua Variabel tentunya kita sudah ingat tentang persamaan Linier Satu Variabel (PLSV). PLSV adalah persamaan yang memuat satu variabel dan pangkat dari variabelnya adalah satu.

Nah sekarang coba kita ingat kembali bahwa persamaan garis lurus pada bidang kartesius dapat dinyatakan dalam bentuk $ax + by = c$ dengan a, b, c konstanta real dengan $a, b \neq 0$ dan x, y adalah variabel pada himpunan bilangan real. Sekarang perhatikan persamaan $x + 4y = 8$, memiliki dua variabel yaitu x dan y serta masing-masing variabel berpangkat satu.

Jadi kesimpulannya adalah Persamaan Linier Dua Variabel adalah suatu persamaan yang mempunyai dua variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu, dan dapat dinyatakan dalam bentuk : $ax + by = c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ dan x, y suatu variabel.

Beberapa contoh PLDV

1. $3x + 6y = 12$
2. $5p - 3q + 30 = 0$

1. Menentukan Penyelesaian Persamaan Linier Dua Variabel

Perhatikan persamaan $x + y = 7$. Persamaan $x + y = 7$ masih merupakan kalimat terbuka, artinya belum mempunyai nilai kebenaran. Jika x diganti bilangan 2, maka nilai y yang memenuhi adalah 5, karena pasangan bilangan $(2, 5)$ memenuhi persamaan tersebut, maka persamaan $x + y = 7$ menjadi kalimat yang benar. Dalam hal ini dikatakan bahwa $(2, 5)$ merupakan salah satu penyelesaian dari persamaan $x + y = 7$.

Untuk mencari nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x + y = 7$ akan lebih mudah dengan membuat table seperti berikut :

Jadi HP dari persamaan $x + y = 7$ adalah $(0, 7)$, $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$. Gambar grafik persamaan $x + y = 7$ pada bidang cartesius.

2. Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV)

Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV) terdiri atas dua persamaan linier dua variabel, yang keduanya tidak berdiri sendiri, sehingga kedua persamaan hanya memiliki satu penyelesaian. Berikut ini beberapa contoh SPLDV :

- $x + y = 3$ dan $2x - 3y = 1$
- $5x + 4y + 7 = 0$ dan $-3x - 2y = 4$

Menentukan Himpunan Penyelesaian SPLDV. Himpunan penyelesaian SPLDV dapat di selesaikan dengan 3 cara, yaitu:

- Dengan cara metode grafik.
- Dengan cara metode substitusi.
- Dengan cara metode eliminasi.

Himpunan penyelesaian SPLDV dengan metode grafik

Pada metode grafik, himpunan penyelesaian dari SPLDV adalah koordinat titik potong dua garis tersebut. Jika garis-garisnya tidak berpotongan di satu titik, maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan cara metode grafik langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

- a. Menggambar garis dari kedua persamaan pada bidang cartesius.
- b. Koordinat titik potong dari garis merupakan himpunan penyelesaian, jika kedua garis tidak berpotongan (sejajar), maka SPLDV tidak mempunyai penyelesaian.

Himpunan Penyelesaian SPLDV dengan Metode Substitusi. Pada metode substitusi terlebih dahulu kita menyatakan variabel yang satu kedalam variabel yang lain dari suatu persamaan, kemudian menggantikan variabel itu dalam persamaan yang lain.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan cara metode substitusi langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

- a. Menyatakan variabel dalam variabel lain, misal menyatakan x dalam y atau sebaliknya.
- b. Mensubstitusikan persamaan yang sudah kita rubah pada persamaan yang lain.
- c. Mensubstitusikan nilai yang sudah ditemukan dari variabel x atau y ke salah satu persamaan.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $x + 2y = 4$ dan $3x + 2y = 12$

$x + 2y = 4$ kita nyatakan x dalam y , diperoleh : $x = 4 - 2y$
substitusikan $x = 4 - 2y$ ke persamaan $3x + 2y = 12$

$$3(4 - 2y) + 2y = 12$$

$$12 - 6y + 2y = 12$$

$$-4y = 12 - 12$$

$$y = 0$$

Substitusikan $y = 0$ ke persamaan $x = 4 - 2y$

$$x = 4 - 2y$$

$$x = 4 - 2 \cdot 0$$

$$x = 4$$

Jadi HP $(4, 0)$

Himpunan Penyelesaian SPLDV dengan metode Eliminasi. Pada metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLDV, caranya dengan menghilangkan salah satu variabel dari system persamaan tersebut. Pada cara eliminasi koefisien dari variabel harus sama atau dibuat menjadi sama.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dengan cara metode eliminasi langkah-langkahnya sebagai berikut :

- Nyatakan ke dua persamaan ke bentuk $ax + by = c$
- Samakan koefisien dari variabel yang akan di hilangkan, melalui cara mengalihkan dengan bilangan yang sesuai.

- c. Jika koefisien dari variabel bertanda sama (sama positif atau negative) maka kurangkan ke dua persamaan tersebut.
- d. Jika koefisien dari variabel yang di hilangkan tandanya berbeda (positif atau negative) maka jumlahkan kedua persamaan tersebut.

D. Penerapan Sistem Linier, Kuadrat dan Dua Variabel

1. Persamaan Linier

Contoh Soal 1

Asep membeli 2 kg mangga dan 1 kg apel dan ia harus membayar Rp15.000,00, sedangkan Intan membeli 1 kg mangga dan 2 kg apel dengan harga Rp18.000,00. Berapakah harga 5 kg mangga dan 3 kg apel?

Penyelesaian:

Kita misalkan harga 1 kg mangga = x dan harga 1 kg apel = y , maka:

$$2x + y = 15000$$

$$x + 2y = 18000$$

Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, misalnya dengan **metode cepat**, maka:

$$\Rightarrow y = (2 \cdot 18000 - 15000 \cdot 1) / (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1)$$

$$\Rightarrow y = (36000 - 15000) / (4 - 1)$$

$$\Rightarrow y = 21000 / 3$$

$$\Rightarrow y = 7000$$

Substitusi nilai $y = 7000$ ke persamaan $2x + y = 15000$, maka:

$$\Rightarrow 2x + y = 15000$$

$$\Rightarrow 2x + 7000 = 15000$$

$$\Rightarrow 2x = 8000$$

$$\Rightarrow x = 4000$$

Dengan demikian, harga 1 kg mangga adalah Rp4.000,00 dan harga 1 kg apel adalah Rp7.000,00.

Harga 5 kg mangga dan 3 kg apel adalah:

$$= 5x + 3y$$

$$= 5.4000 + 3.7000$$

$$= 20000 + 21000$$

$$= 41000$$

Jadi, harga 5 kg mangga dan 3 kg apel adalah Rp 41.000,00.

2. Persamaan Kuadrat

Contoh 1: Menyelesaikan Penerapan Persamaan Kuadrat

Seorang anak berdiri di atas tebing yang memiliki ketinggian 5 m dari permukaan tanah, melempar bola ke atas dengan kecepatan awal 20 m/s (anggap bola dilepaskan ketika berada 1 m di atas permukaan tebing di mana anak tersebut berdiri). Tentukan (a) tinggi bola setelah 3 detik, dan (b) waktu yang dibutuhkan agar bola tersebut sampai di permukaan tanah

Pembahasan

Dengan menggunakan informasi yang diberikan soal, kita memperoleh $h = -5t^2 + 20t + 6$. Untuk menentukan tinggi bola setelah 3 detik, substitusikan $t = 3$ ke dalam persamaan tersebut.

Apabila bola sampai di permukaan tanah, maka ketinggian bola tersebut adalah 0 meter. Sehingga dengan mensubstitusi $h = 0$ diperoleh,

Karena waktu tidak pernah negatif, maka waktu yang diperlukan agar bola tersebut sampai di permukaan tanah adalah 4,28 detik.

3. Dua Variabel

Contoh soal:

- a. Dua tahun yang lalu seorang laki-laki umurnya 6 kali umur anaknya. 18 tahun kemudian umurnya akan menjadi dua kali umur anaknya. Carilah umur mereka sekarang!

Penyelesaian:

Misalkan umur ayah sekarang x tahun dan umur anaknya y tahun, maka

$$x - 2 = 6(y - 2)$$

$$x - 6y = -10 \dots\dots\dots (1)$$

$$x + 18 = 2(y + 18)$$

$$x - 2y = 18 \dots\dots\dots (2)$$

dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$x - 6y = -10$$

$$x - 2y = 18 -$$

$$-4y = -28$$

$$y = 7$$

subtitusikan nilai $y = 7$ ke dalam persamaan $x - 2y = 18$, maka diperoleh

$$x - 2(7) = 18$$

$$x - 14 = 18$$

$$x = 32$$

jadi, sekarang umur ayah 32 tahun dan anaknya berumur 7 tahun.

- b. Keliling sebidang tanah yang berbentuk persegi panjang adalah 48 m. panjangnya lebih 6 meter dari lebarnya. Tentukan ukuran tanah itu!

Penyelesaian

Misalnya panjang dan lebar tanah itu adalah x m dan y m.

Keliling = $2(\text{panjang} + \text{lebar})$

$$48 = 2(x + y) \text{ atau } x + y = 24 \dots\dots\dots(1)$$

$$x = y + 6 \text{ atau } x - y = 6 \dots\dots\dots(2)$$

dari persamaan (1) dan (2) dapat diperoleh

$$x + y = 24$$

$$x - y = 6 -$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

subtitusikan $x = 15$ ke dalam persamaan $x + y = 24$, sehingga diperoleh

$$15 + y = 24$$

$$y = 24 - 15$$

$$y = 9$$

jadi, ukuran tanah itu adalah $15 \text{ m} \times 9 \text{ m}$.

- c. Harga sebuah buku dan sebuah pensil RP 5.500,- harga 2 buku dan 3 buah pensil RP 12.500,-.

- 1) Nyatakan kalimat diatas dalam bentuk persamaan dengan peubah x dan y !

- 2) Selesaikan persamaan itu!
- 3) Tentukan harga 4 buah buku dan 3 buah pensil!

Penyelesaian:

- 1) Misalkan harga sebuah buku = x, rupiah
 Harga sebuah pensil = y, rupiah
 Maka persamaan dalam x dan y adalah
 $x + y = 5.500 \dots(1)$
 $2x + 3y = 12.500 \dots(2)$
- 2) Menyelesaikan persamaan diatas dengan disubstitusikan
 $x + y = 5.500$
 $x = 5.500 - y$
 substitusikan $x = 5.500 - y$ ke persamaan 2
 untuk $x = 5.500 - y \rightarrow$ maka $2x + 3y = 12.500$
 $2(5.500 - y) + 3y = 12.500$
 $11.000 - 2y + 3y = 12.500$
 $11.000 + y = 12.500$
 $y = 12.500 - 11.000$
 $y = 1.500$
 substitusikan $y = 1.500$ ke persamaan $x = 5.500 - y$
 $x = 5.500 - 1.500$
 $x = 4.000$
 jadi nilai x dan y adalah Rp. 4.000 dan Rp. 1.500
- 3) c. Harga 4 buah buku dan 3 buah pensil
 $= 4x + 3y$

$$= 4(\text{Rp.}4.000,-) + 3(\text{Rp. } 1.500,-)$$

$$= \text{Rp. } 16.000,- + \text{Rp. } 4.500,-$$

$$= \text{Rp. } 20.500,-$$

Jadi, harga 4 buah buku dan 3 buah pensil adalah
Rp. 20.500,-

BAB VI

RELASI DAN FUNGSI

Dr. Rahmy Zulmaulida, M.Pd
IAIN Lhokseumawe, Aceh

A. Relasi

1. Pengertian Relasi

Relasi adalah hubungan antara dua elemen dua himpunan. Relasi juga dikatakan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan atau korespondensi dari anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B. relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B dengan aturan tertentu.

Contoh :

Ada tiga anak mengatakan makanan kesukaan nya yaitu: Anis menyukai Bakso, Rina menyukai Sate dan Diko menyukai Nasi Padang.

Dari pernyataan di atas terdapat dua himpunan yaitu:

$A =$ himpunan anak $\{\text{Anis, Rina, Diko}\}$

$B =$ himpunan makanan $\{\text{Bakso, Sate, Nasi Padang}\}$

Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukai atau menyenangi. Dari contoh di atas, himpunan A disebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut kodomain (daerah kawan). Sementara

itu menyukai disebut Relasi. Himpunan semua anggota kodomain disebut Range (daerah hasil).

2. Metode Menyatakan Relasi

Relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu:

- a. Dengan himpunan pasangan berurutan
- b. Dengan diagram panah
- c. Dengan diagram Cartesius
- d. Dengan Tabel

Contoh :

$A = \{ \text{Buyung, Doni, Vita, Putri} \}$ dan $B = \{ \text{IPS, Kesenian, Keterampilan, Olahraga, Matematika, IPA, Bahasa Inggris} \}$ dan relasi yang menghubungkan antara himpunan A dan himpunan B adalah “pelajaran yang disukai”.

Keterangan: Buyung suka IPS dan Kesenian, Doni suka Keterampilan dan Olahraga, Vita suka IPA, dan Putri suka Matematika dan Bahasa Inggris.

Jawaban dengan tiga metode :

- a. Dengan himpunan pasangan berurutan

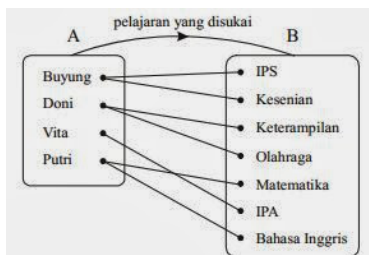
Himpunan yang anggotanya semua pasangan berurutan (x,y) dinamakan himpunan pasangan berurutan.

$\{(\text{Buyung, IPS}), (\text{Buyung, Kesenian}), (\text{Doni, Keterampilan}), (\text{Doni, Olahraga}), (\text{Vita, IPA}), (\text{Putri, Matematika}), (\text{Putri, Bahasa Inggris})\}$

- b. Dengan Diagram Panah

Langkah-langkah menyatakan relasi dengan diagram panah:

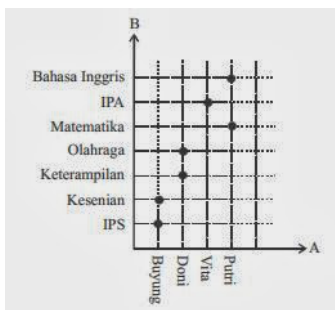
- 1) Membuat dua lingkaran atau elips
- 2) Untuk meletakkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B $x=A$ diletakkan pada lingkaran A dan $y=B$ diletakkan pada lingkaran B
- 3) X dan Y dihubungkan dengan anak panah
- 4) Arah anak panah menunjukkan arah relasi
- 5) Anak panah tersebut mewakili aturan relasi



c. Dengan diagram Cartesius

Pada diagram Cartesius diperlukan dua salip sumbu yaitu : sumbu mendatar (horizontal) dan sumbu tegak (vertical) yang berpotongan tegak lurus.

- 1) $X= A$ diletakkan pada sumbu mendatar
- 2) $Y= B$ diletakkan pada sumbu tegak



d. Tabel

Nama	Mata Pelajaran
Buyung	IPS
Buyung	Kesenian
Doni	Keterampilan
Doni	Olahraga
Vita	IPA
Putri	Matematika
Putri	Bahasa Inggris

3. Sifat-Sifat Relasi

a. Relasi Refleksif (Bercermin)

Relasi disebut *refleksif* jika dan hanya jika untuk setiap x anggota semesta-nya, x berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi R refleksif jika dan hanya jika xRx .

Contoh :

Jika diketahui $A = \{1,2,3,4\}$ dan relasi $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ Pada A , maka R $x \in A$ adalah refleksif, karena untuk setiap $x \in A$ terdapat (x,x) pada R . Perhatikan relasi pada himpunan $= \{1,2,3,4\}$ berikut:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

b. Relasi Irrefleksif

Relasi R pada A disebut *Irrefleksif* (anti refleksif) jika dan hanya jika setiap elemen di dalam tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi, irrefleksif jika dan hanya jika $x \not R x$.

Contoh :

Diketahui himpunan $B = \{a, b, c\}$ dan relasi $R = \{(a, c), (b, c), (b, a)\}$. Relasi R adalah irrefleksif, karena (a, a) , (b, b) , dan (c, c) bukan elemen.

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi $R = \{(2, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. Relasi R merupakan relasi irrefleksif, karena tidak terdapat elemen (x, x) , dimana $x \in A$.

c. Relasi Nonrefleksif

Relasi R pada A disebut *nonrefleksif* jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu elemen di dalam A yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh :

Perhatikan relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Relasi tersebut merupakan relasi non refleksif, karena ada $(1, 2)$ dan $(2, 3)$.

d. Relasi Simetri

Relasi R disebut *simetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku jika a berelasi R dengan b maka b juga berelasi dengan a .

Secara simbolik: $aRb \rightarrow bRa$.

Contoh:

- 1) Relasi $R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$ dalam himpunan $\{a, b, c\}$.
- 2) Ani menyukai Budi, Budi menyukai Ani $\{(Ani, Budi), (Budi, Ani)\}$

e. Relasi Asimetri

Relasi R disebut *asimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b maka b tidak berelasi R dengan a .

Secara simbolik: R asimetri pada S jika $(\forall a, b \in S) aRb \rightarrow b \not R a$.

Contoh:

1) Relasi $R = \{ (a,b), (b,c), (c,a) \}$ dalam himpunan $\{a,b,c\}$.

f. Relasi Nonsimetri

Relasi R disebut *nonsimetri* pada S jika dan hanya jika ada dua anggota a dan b dari S sedemikian hingga berlaku: a berelasi R dengan b tetapi b tidak berelasi R dengan a .

1) Perhatikan bahwa nonsimetri adalah negasi/ingkaran dari simetri.

Contoh:

1) Relasi $R = \{ (a,b), (a,c), (c,a) \}$ dalam himpunan $\{a,b,c\}$

g. Relasi Antisimetri

Relasi R disebut *antisimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b dan b berelasi R dengan a maka $a=b$.

Contoh:

1) $3A =$ keluarga himpunan.

Relasi “himpunan bagian” adalah relasi yang antisimetris pada A , karena untuk setiap dua himpunan x dan y , jika $x \subset y$ dan $y \subset x$, maka $x = y$.

2) Relasi “kurang dari atau sama dengan ($\leq$)” dalam himpunan bilangan real. Jadi, relasi “kurang dari

atau sama dengan ($\leq$)” bersifat anti simetri, karena jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = b$.

h. Relasi Transitif

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *Transitif* pada A jika dan hanya jika setiap 3 anggota himpunan A, $(a,b,c \in A)$ jika $(a,b) \in R$, dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \in R$ (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a berelasi dengan c).

Contoh:

1) Relasi $R = \{(a,b), (b,c), (a,c), (c,c)\}$ dalam himpunan $\{a,b,c\}$.

i. Relasi Nontransitif

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *nontransitif* pada A jika dan hanya jika ada tiga anggota himpunan A, $(a,b,c \in A)$ sedemikian hingga $(a,b) \in R$, dan $(b,c) \in R$ dan $(a,c) \notin R$ (ada tiga anggota a,b,c dari A sedemikian hingga a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c dan a tidak berelasi dengan c).

Contoh:

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ dalam himpunan $\{1,2,3,4\}$

j. Relasi Intransitif

R adalah relasi pada himpunan A. R disebut relasi *intransitif* pada A jika dan hanya jika setiap tiga anggota himpunan A, $(a,b,c \in A)$ jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \notin R$ (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c).

Misal $E = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,2), (2,3), (2,5), (3,4), (5,7)\}$

Relasi di atas intransitif karena :

$(1,2) \in R$ dan $(2,3) \in R$, tetapi $(1,3) \notin R$

$(1,2) \in R$ dan $(2,5) \in R$, tetapi $(1,5) \notin R$

$(2,3) \in R$ dan $(3,4) \in R$, tetapi $(2,4) \notin R$

$(2,5) \in R$ dan $(5,7) \in R$, tetapi $(2,7) \notin R$

4. Komposisi Relasi

- Misalkan :

R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B

T adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C .

- Komposisi R dan S , dinotasikan dengan $T \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk suatu } b \in B \text{ sehingga } (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$

- Contoh komposisi relasi

- Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$

- Relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

$$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$$

- Relasi dari B ke C didefinisikan oleh :

$$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

- Maka komposisi relasi R dan T adalah

$$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$$

B. Fungsi

1. Pengertian Fungsi

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi. Sebuah relasi dikatakan fungsi jika xRy , untuk setiap x anggota A memiliki tepat satu pasangan, y , anggota himpunan B

Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A . Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$.

- $f: A \rightarrow B$
- A dinamakan daerah asal (*domain*) dari f dan B dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari f .
- Misalkan $f(a) = b$, maka b dinamakan bayangan (*image*) dari a , dan a dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari b .
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (*range*) dari f .

2. Penulisan Fungsi

a. Himpunan pasangan terurut.

- Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk : $f = \{(2, 4), (3, 9)\}$

b. Formula pengisian nilai (assignment)

- $f(x) = x^2 + 10$,
- $f(x) = 5x$

3. Jenis-Jenis Fungsi

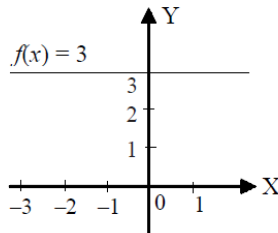
a. Fungsi konstan (fungsi tetap)

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku $f(x) = C$, di mana C bilangan konstan. Untuk lebih jelasnya, pelajaryliah contoh soal berikut ini.

Diketahui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $f(x) = 3$ dengan daerah domain: $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$. Sehingga, gambar grafiknya.

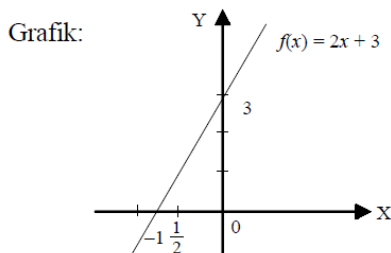
x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

Grafik:



b. Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, di mana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus. Perhatikan contoh berikut. Diketahui $f(x) = 2x + 3$, gambar grafiknya.

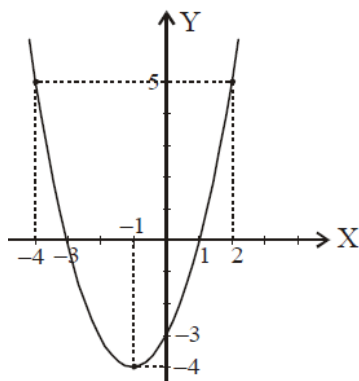
$2x + 3$		
x	0	$-1\frac{1}{2}$
$f(x)$	3	0



c. Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi kuadrat apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, di mana $a \neq 0$ dan a , b , dan c bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola. Perhatikan contoh fungsi kuadrat berikut.

Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2x - 3$, gambar grafiknya.



d. Fungsi identitas

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama. Fungsi identitas ditentukan oleh $f(x) = x$. Agar lebih memahami tentang fungsi identitas, pelajailah contoh berikut ini. Fungsi pada $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = x$ untuk setiap x .

1) Carilah $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.

2) Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:

3) Nilai $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, dan $f(3)$.

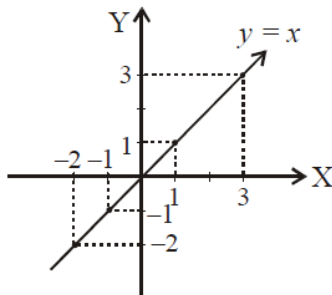
$$f(x) = x$$

$$f(-2) = -2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(3) = 3$$



4. Sifat-sifat Fungsi

a. Fungsi Injektif/satu-satu

- 1) Fungsi satu-satu
- 2) Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan a_2 dengan a_1 tidak sama dengan a_2 berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1)$ sama dengan $f(a_2)$.

b. Fungsi Surjektif/ onto

- 1) Fungsi kepada
- 2) Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang b dalam kodomain B terdapat paling tidak satu a dalam domain A sehingga berlaku $f(a) = b$.
- 3) Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).

c. Fungsi Bijektif/ korespondensi satu-satu

- 1) Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang b dalam kodomain B terdapat tepat satu a dalam domain A sehingga $f(a) = b$, dan tidak ada anggota A yang tidak terpetakan dalam B .
- 2) Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.

BAB VII LIMIT FUNGSI

Lisa, S.Si.,M.Pd
IAIN Lhokseumawe

A. Pengertian Limit Fungsi

Limit itu suatu batas yang menggunakan konsep pendekatan fungsi. Jadi, bisa dibilang limit adalah nilai yang didekati fungsi saat suatu titik mendekati nilai tertentu.

Bentuk Umum Limit

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dimana $x \neq c$

$x \rightarrow c$

dibaca “ Limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c adalah L ”

Sebuah fungsi punya limit di titik c , jika limit kiri dan limit kanan bernilai sama di titik c

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$

$x \rightarrow c^- \quad x \rightarrow c^+$

B. Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalnya, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi yang punya limit di $x \rightarrow c$, dengan k dan c adalah bilangan real, serta n adalah bilangan bulat positif, maka berlaku :

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3. $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$

4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \pm \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
6. $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]}{\left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]}, \text{ asalkan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$
8. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \text{ asalkan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$

C. Menentukan Nilai Limit Fungsi Aljabar

Ada 2 bentuk dalam menentukan limit fungsi aljabar yaitu :

Bentuk pertama

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Bentuk kedua

$$\lim_{x \rightarrow \sim} f(x)$$

Dalam hubungannya dengan bentuk limit yang pertama adalah beberapa metode dalam menentukan nilai limit fungsi yaitu cara substitusi, cara faktorisasi, dan cara perkalian sekawan.

1. Cara Substitusi

Cara substitusi ini langkahnya dengan mengganti peubah yang mendekati nilai tertentu dengan fungsi aljabarnya. Berikut adalah beberapa contoh yang dapat dipahami

Contoh 1

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1 = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1 = 2$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 5 = 2(2)^2 + 5 = 2(4) + 5 = 8 + 5 = 13$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 5 = 13$$

Contoh 3:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(0)^3}{(0)^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$$

2. Cara Faktorisasi

Cara pemfaktoran digunakan apabila cara substitusi menghasilkan nilai limit yang tidak terdefinisikan seperti pada contoh berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{x - 1} = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = 0$$

Cara pemfaktoran dilakukan dengan langkah menentukan faktor persekutuan antara pembilang dan penyebutnya. Berikut beberapa contoh untuk dipahami.

Contoh 1:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = (2) + 2 = 4$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{x - 1} = 4$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2 - 15x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x(x^2 + 2x - 15)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{(x^2 + 2x - 15)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(x + 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x + 5)} = \frac{1}{(3) + 5} = \frac{1}{8}$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2 - 15x} \right) = \frac{1}{8}$$

3. Cara Perkalian Sekawan

Dalam hubungannya dengan bentuk limit yang kedua ada beberapa cara dalam menentukan nilai limit fungsi aljabar yaitu metode membagi dengan pangkat tertinggi penyebut dan metode mengalikan dengan faktor sekawan.

a. Metode membagi dengan pangkat tertinggi penyebut

Tentukan nilai limit fungsi aljabar dari

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 7x} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{4x^2 - 6x + 1}{x^2}}{\frac{2x^2 + 7x}{x^2}}$$

Besar pangkat pembilang dan penyebut dalam soal ini adalah 2, maka

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{7}{x}}$$

$$\frac{4 - \frac{6}{\sim} + \frac{1}{\sim^2}}{2 + \frac{7}{\sim}} = \frac{4 - 0 - 0}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Jadi, nilai dari limit fungsi aljabar tersebut,

$$\lim_{x \rightarrow \sim} \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 7x} = 2$$

b. Metode mengalikan dengan faktor sekawan

Contoh soal:

Tentukan nilai limit dari

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{x - \sqrt{6x - 8}} = \dots$$

Langkah awal yang perlu dilakukan untuk menentukan nilai suatu limit yaitu dengan mensubstitusikan $x=c$ ke $f(x)$, sehingga dalam kasus ini substitusikan $x=4$ ke

$$\frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{4-4}{\sqrt{6 \cdot 4}-8} = \frac{0}{4-\sqrt{24}-8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{0}{4-\sqrt{16}} = \frac{0}{0}$$

Setelah disubstitusikan ternyata nilai limit tersebut tidak terdefinisi atau merupakan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Maka dari itu untuk menentukan nilai suatu limit harus menggunakan metode lain. Apabila diperhatikan, pada $f(x)$ terdapat bentuk akar yaitu $\sqrt{6x-8}$ sehingga metode perkalian dengan akar sekawaran dapat dilakukan pada kasus seperti ini.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \frac{(4-x)(x+\sqrt{6x-8})}{x^2-\sqrt{6x-8}}$$

$$= \frac{-(x-4)(x+\sqrt{6x-8})}{x^2-\sqrt{6x-8}}$$

Bentuk x^2-6x+8 dapat difaktorkan menjadi $(x-4)(x-2)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x+\sqrt{6x-8})}{(x-4)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x+\sqrt{6x-8})}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{x - \sqrt{6x - 8}} = \frac{-(4 + \sqrt{6 \cdot 4 - 8})}{4 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{x - \sqrt{6x - 8}} = \frac{-(4 + \sqrt{16})}{2} = -4$$

Jadi, nilai limit fungsi aljabar tersebut adalah -4 untuk cara perkalian sekawan itu dipakai kalau hasil uji substitusi menghasilkan bentuk tak tentu, dan khusus untuk soal limit yang fungsinya berbentuk akar. Jadi, cukup melakukan perkalian sekawan dari fungsi yang hanya mengandung akar. Intinya, tidak merubah soal dan bentuk akar, tapi hanya operasi penghubung akar yang diubah.

Contoh 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} =$$

Pertama, kita uji dulu pake cara dasar yaitu substitusi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - 0}}{0} = \frac{0}{0}$$

karena menghasilkan bentuk tak tentu, langsung kita pakai cara perkalian sekawan. Bentuk akar ada di pembilangnya, jadi sekawan dari $2 - \sqrt{4 - x}$ adalah $2 + \sqrt{4 - x}$. Maka bisa ditulis,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} \times \frac{2 + \sqrt{4 - x}}{2 + \sqrt{4 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4 - x)}{x(2 + \sqrt{4 - x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(2 + \sqrt{4 - x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2 + \sqrt{4 - x})} \\
&= \frac{1}{(2 + \sqrt{4 - 0})} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Jadi didapat hasil $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 5)}{(x + 2)} \\
&= \frac{(2 + 5)}{(2 + 2)} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Latihan :

Kerjakan soal untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep terhadap materi limit fungsi aljabar berikut ini:

1. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 4x}{2x^4 + x} = \dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 7x + 3} = \dots$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x - 2}} = \dots$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x - 3}}{x - 1} = \dots$

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \dots$

D. Limit Fungsi Trigonometri

Limit fungsi trigonometri memiliki definisi sebagai nilai terdekat suatu sudut dalam fungsi trigonometri. Perhitungan ini dapat disubstitusikan layaknya limit fungsi aljabar, tapi dengan fungsi trigonometri yang harus diubah terlebih dahulu.

Fungsi trigonometri tersebut harus diubah menjadi identitas trigonometri untuk limit tak tentu, yaitu limit yang jika disubstitusikan akan bernilai 0. Selain itu, ada pula cara menghitung limit tak tentu tanpa menggunakan identitas trigonometri, tapi menggunakan teorema limit trigonometri. Ada juga yang menggunakan baik identitas dan teorema secara bersamaan. Untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri, ada berbagai cara yang dapat digunakan, yaitu metode numerik, substitusi, pemfaktoran, kali sekawan, dan turunan. Tapi berdasarkan nilainya, kita bisa membagi rumus ini menjadi dua, yaitu yang mendekati bilangan dan mendekati nol.

Mendekati Suatu Bilangan

Jika kita memiliki limit fungsi trigonometri yang x -nya mendekati bilangan c , kita dapat menentukan nilainya dengan substitusi c pada fungsi trigonometri. Rumus-rumusny adalah sebagai berikut.

1. $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$
2. $\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$
3. $\lim_{x \rightarrow c} \tan x = \tan c$
4. $\lim_{x \rightarrow c} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} c$

5. $\lim_{x \rightarrow c} \sec x = \sec c$
6. $\lim_{x \rightarrow c} \cotan x = \cotan c$

Mendekati Nol

Jika x dari suatu limit fungsi trigonometri mendekati nol, kita dapat menggunakan rumus-rumus di bawah ini.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + \tan bx}{cx - \sin dx} = \frac{a + b}{c - d}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri dibagi menjadi 4 metode, yaitu (1) dengan metode substitusi langsung; (2) dengan menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri; (3) dengan metode pemfaktoran; (4) dengan cara menyederhanakan fungsi trigonometrinya.

Metode substitusi langsung penerapan metode substitusi langsung dalam menentukan atau menyelesaikan limit

fungsi trigonometri sangat mudah, yakni dengan langsung mengganti x dengan angka yang tertera di soal atau

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Perhatikan contoh soal berikut: Gunakan metode substitusi untuk menentukan nilai Limit fungsi trigonometri berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 2x = \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin 90^\circ = 1$$

Berikut disajikan tabel sudut istimewa

	0°	30°	45°	60°	90°
Sina	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cosa	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tga	$\frac{0}{1}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{0}$
	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tdk terdefinisi

Menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri rumus dasar dari limit fungsi trigonometri sederhana. Rumus dasar limit fungsi trigonometri tersebut adalah:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

Contoh, tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 6x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x} = \frac{2}{5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x - \tan 3x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \\ = \frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{3x \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \sin 2x}{3 \cdot x \cdot x} \\ = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{3}$$

Metode Pemfaktoran

Untuk metode pemfaktoran konsepnya sama persis dengan metode pemfaktoran dalam limit fungsi aljabar. Metode pemfaktoran dilakukan ketika menemukan jawaban dengan bentuk tak tentu atau $0/0$, artinya di sini harus melakukan pemfaktoran. Trik metode pemfaktoran adalah harus membuang si pembuat nol dalam fungsi tersebut. Sebagai contoh, perhatikan soal di bawah ini. Tentukan nilai limit berikut:

Contoh 1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{0+2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(2x+3)}{x^2+4x-5} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \right] \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+3)}{(x+5)} \right] \\ &= 1 \cdot \frac{2(1)+3}{(1+5)} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Menyederhanakan Fungsi Trigonometrinya

Untuk dapat mengerjakan soal limit fungsi trigonometri seperti ini, mengharuskan untuk buka kembali rumus-rumus trigonometrinya. Tentukan nilai limit fungsi berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} =$$

Jika mensubstitusi x dengan 0 maka akan didapat bentuk tak tentu atau 0 / 0 . Dalam hal ini harus merubah cos x menjadi fungsi lain.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x)}{2x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 \frac{1}{2}x) + \sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x}{2x \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\sin x} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Latihan :

Kerjakan soal untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep terhadap materi limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim_{x \rightarrow 30^\circ} \frac{\sin 3x + \cos 2x}{1 - \tan 2x} = \dots$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 6x} = \dots$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin 3x}{\sin 2x \tan 3x} = \dots$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{a}{b}x}{\tan cx} = \dots$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2} = \dots$

BAB VIII

TURUNAN DAN APLIKASINYA

La Ode Asmin, S.Si., M.Sc.
IAIN Kediri

A. Definisi Turunan

Turunan suatu fungsi $f(x)$ dituliskan $f'(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

pada sebarang nilai x yang membuat nilai limit tersebut ada. Suatu fungsi yang memiliki turunan disebut terdiferensiasi. Fungsi dapat diturunkan jika fungsi tersebut kontinu.

Teorema: Jika f mempunyai turunan di x , maka f kontinu di x .

Contoh 1

Carilah turunan dari fungsi $f(x)=2x+4$

Jawab

Dari definisi turunan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) + 4 - 2x - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2h + 4 - 2x - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \end{aligned}$$

Jadi $f'(x)=2$.

B. Notasi Turunan

Ada beberapa notasi yang digunakan untuk menuliskan turunan suatu fungsi, yaitu

1. Notasi $f'(x)$ yaitu turunan dari fungsi $f(x)$
2. Notasi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yaitu laju perubahan y terhadap x , yang dikenal sebagai notasi Leibniz.

C. Aturan - Aturan Turunan

1. Untuk sembarang bilangan ril n , jika $y=x^n$, maka

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

2. Turunan dari suatu fungsi konstan adalah nol, sehingga jika k adalah bilangan ril, maka

$$\frac{d}{dx} k = 0$$

3. Jika $f(x)$ adalah fungsi pertama dan $g(x)$ adalah fungsi kedua, turunan $f(x) + g(x)$ dan $f(x) - g(x)$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] &= \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x) \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

dan

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x) = f'(x) - g'(x)$$

4. Jika $f(x)$ adalah fungsi pertama dan $g(x)$ adalah fungsi kedua, maka turunan dari perkalian suatu fungsi adalah fungsi pertama dikalikan dengan turunan fungsi kedua dan ditambahkan fungsi kedua dikalikan dengan turunan fungsi pertama.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] + g(x)\left[\frac{d}{dx}f(x)\right] \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$

5. Jika $f(x)$ adalah fungsi pertama dan $g(x)$ adalah fungsi kedua, maka turunan dari suatu hasil bagi adalah fungsi kedua dikalikan dengan turunan dari fungsi pertama dikurangi fungsi pertama dikalikan dengan turunan dari fungsi kedua, kemudian dibagi dengan kuadrat dari fungsi kedua.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

6. Jika $f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi dan k adalah konstanta, maka

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{df(x)}{dx} = cf'(x)$$

7. Jika $f(x)$ adalah fungsi terdiferensikan di x , maka untuk sembarang bilangan riil n ,

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

8. Turunan dari fungsi komposisi $f \circ g$ adalah

$$\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Jika $y=f(u)$ dan $u=g(x)$ adalah dua buah fungsi yang dapat diturunkan, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$. Aturan ini dikenal sebagai aturan rantai.

9. Turunan kedua suatu fungsi adalah turunan dari turunan pertama fungsi tersebut, yaitu

$$\frac{d}{dx}(f'(x)) = [f'(x)]' = f''(x)$$

Contoh 2

Carilah turunan dari $5x^9$

Jawab

$$\frac{d}{dx}(5x^9) = 5 \frac{d}{dx}(x^9) = 5 \cdot 9x^{9-1} = 45x^8$$

Contoh 3

Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari: (i) $y = x^5$; (ii) $y = \frac{1}{x^2}$

Jawab

a. $\frac{d}{dx}x^5 = 5x^{5-1} = 5x^4$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Contoh 4

Carilah turunan dari $f(x)=2x^4+7x^2$

Jawab

Dengan menggunakan sifat penjumlahan turunan, maka

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (2x^4 + 7x^2) = \frac{d}{dx} (2x^4) + \frac{d}{dx} (7x^2) \\
 &= 2 \frac{d}{dx} (x^4) + 7 \frac{d}{dx} (x^2) \\
 &= 2 \cdot 4x^{4-1} + 7 \cdot 2x^{2-1} = 8x^3 + 14x
 \end{aligned}$$

Contoh 5

Carilah turunan: $f(x)=(x+4)(x^2)$ dan $f(x)=(x^2-2)^3$;

Jawab

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [(x+4)(x^2)] &= (x+4) \cdot \frac{d}{dx} x^2 + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (x+4) \\
 &= (x+4) \cdot 2x^{2-1} + x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 4 \right) \\
 &= (x+4) \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 2x^2 + 8x + x^2 \\
 &= 3x^2 + 8x \\
 \frac{d}{dx} [(x^2-2)^3] &= 3(x^2-2)^{3-1} \cdot \frac{d}{dx} (x^2-2) \\
 &= 3(x^2-2)^2 \cdot 2x^{2-1} \\
 &= 3(x^2-2)^2 \cdot 2x \\
 &= 6x(x^2-2)^2
 \end{aligned}$$

D. Turunan Fungsi Trigonometri, Eksponensial, dan Logaritma

Turunan fungsi trigonometri,

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x; \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x;$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x; \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x; \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

Beberapa bentuk turunan fungsi eksponensial dan logaritma adalah $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$; $\frac{d}{dx} n^x = n^x \ln n$ dan $\frac{d}{dx} \log_n x = \frac{1}{x \ln n}$.

Contoh 6

Carilah turunan dari: (i) $f(x)=\sin(\cos x^2)$; (ii) $f(x)=\cos(\log x)$; dan (iii) $f(x)=\sin(2x^2-4)$

Jawab

- $$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d}{dx} [\sin(\cos x^2)] &= \cos(\cos x^2) \frac{d}{dx} (\cos x^2) \\ &= \cos(\cos x^2) (-\sin x^2) \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \cos(\cos x^2) (-\sin x^2) (2x) \\ &= -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2) \end{aligned}$$
- $$2. \quad \frac{d}{dx} \cos(\log x) = -\sin(\log x) \cdot \frac{d}{dx} \log x = -\frac{\sin(\log x)}{x}$$
3. Misal $u=2x^2-4$, maka $f(x)=\sin u$. Turunan $f(x)$ adalah $f'(x)=y'=\cos u \cdot u'=\cos (2x^2-4) \cdot 4x= 4x \cos (2x^2-4)$

Contoh 7

Carilah turunan kedua dari fungsi: (i) $f(x)=2x^4-x^3+4x^2-1$; (ii) $f(x)=x \sin x$

Jawab

1. Turunan pertama dari fungsi f adalah

$$f'(x)=4.2x^{4-1}-3x^{3-1}+2.4x^{2-1}=8x^3-3x^2+8x$$

Sehingga, turunan keduanya adalah turunan dari turunan pertama: $f''(x)=24x^2-6x+8$

2. $f'(x)=\sin x+x \cos x$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos x + (\cos x - x \sin x) \\ &= 2 \cos x - x \sin x \end{aligned}$$

E. Turunan Invers

Jika $f(x)$ adalah fungsi yang dapat dibalik, maka turunan dari fungsi $f^{-1}(x)$ di $x=a$ diberikan oleh

$$(f^{-1}(a))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

Contoh 8

Carilah turunan invers dari fungsi $f(x)=2x^2+x$ di $x=2$.

Jawab

Karena nilai x yang memberikan nilai $f(2)=2$ adalah $x=1$, maka $(f^{-1}(2))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{4x}$. Substitusi nilai x , diperoleh $(f^{-1}(2))' = \frac{1}{4}$.

F. Turunan Implisit

Persamaan $F(x,y)=0$, dapat diturunkan dengan turunan implisit dengan cara: (i) Anggap y sebagai fungsi dari x ; (ii) turunkan persamaan terhadap x ; dan (iii) tuliskan hasilnya dalam bentuk $\frac{dy}{dx}$.

Contoh 9

Jika y adalah fungsi dari x , carilah $\frac{dy}{dx}$, dari fungsi $y=x^2y+xy-y^2=0$

Jawab

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}(y^2) &= 0 \\ \left(x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy\right) + \left(x \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx}y\right) - \left(2y \frac{dy}{dx}\right) &= 0 \\ (x^2 + x - 2y) \frac{dy}{dx} + 2xy + y &= 0 \\ (x^2 + x - 2y) \frac{dy}{dx} &= -(2xy + y) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{(2xy + y)}{(x^2 + x - 2y)}\end{aligned}$$

G. Titik Kritis

Titik $x=c$ dikatakan sebagai titik kritis dari fungsi $f(x)$ jika $f(c)$ ada dan jika $f'(c)=0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

Contoh 10

Carilah titik kritis dari fungsi $f(x) = 2x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 3$

Jawab

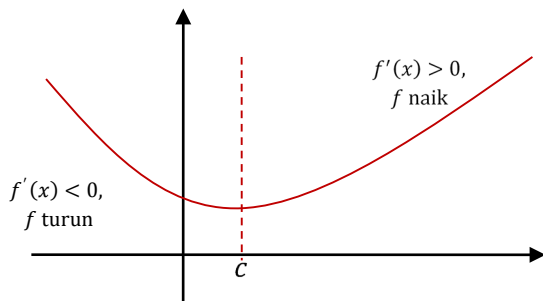
Turunan pertama $f'(x) = 10x^4 - 40x^3 + 30x^2$ atau $f'(c) = c^4 - 4c^3 + 3c = 0$. Lakukan pemfaktoran diperoleh $c^2(c-1)(c-3) = 0$. Sehingga titik kritisnya adalah $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; dan $c_3 = 3$.

H. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Misal f adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu interval, maka fungsi f adalah fungsi naik pada interval jika $f(x_1) < f(x_2)$ ketika $x_1 < x_2$ dalam interval, dan dikatakan fungsi turun pada interval jika $f(x_1) > f(x_2)$ ketika $x_1 < x_2$ dalam interval. Salah satu bentuk penerapan turunan suatu fungsi adalah menentukan apakah suatu fungsi disebut sebagai fungsi naik, turun atau konstan pada suatu interval.

Teorema: Jika f adalah fungsi yang terdefinisi dan memiliki turunan pada suatu interval, maka

1. Fungsi $f(x)$ dikatakan naik jika turunan $f'(x) > 0$
2. Fungsi $f(x)$ dikatakan turun jika turunan $f'(x) < 0$
3. Fungsi $f(x)$ dikatakan konstan jika turunan $f'(x) = 0$



Gambar 1. Ilustrasi Fungsi naik dan Fungsi turun

Contoh 11

Carilah interval dimana fungsi $f(x) = 2x^4 - 16x^2$, naik atau turun.

Jawab

Mencari nilai kritis dari fungsi $f(x)$: $f'(x) = 8x^3 - 32x = 8x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2) = 0$.

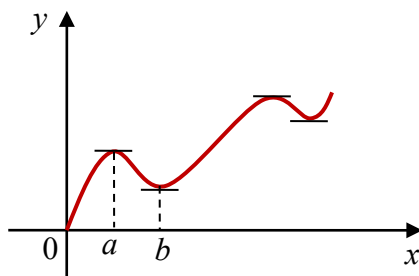
Jadi terdapat tiga bilangan kritis yaitu 0; -1; dan 1. Berdasarkan bilangan kritis, maka interval-intervalnya adalah $(-\infty, -2)$; $(2, \infty)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$ Pada $(-\infty, -2)$, $f'(-3) = -120 < 0$. Pada $(2, \infty)$, $f'(3) = 120 > 0$. Pada $(-2, 0)$, $f'(-1) = 24 > 0$ dan pada $(0, 2)$, $f'(1) = -24 < 0$. Jadi, fungsi $f'(x)$ naik pada $(2, \infty)$ dan $(-2, 0)$; turun pada $(0, 2)$ dan $(-\infty, -2)$.

I. Maksimum Lokal dan Minimum Lokal

Titik maksimum lokal dan minimum lokal dapat didefinisikan sebagai berikut:

1. Titik c adalah titik maksimum lokal dari fungsi f jika terdapat interval (a, b) dengan $c \in (a, b)$ sehingga $f(c) \geq f(x)$, untuk semua $c \in (a, b)$
2. Titik adalah titik minimum lokal dari fungsi jika terdapat interval dengan sehingga , untuk semua

Lokal Maksima dan minima sering disebut sebagai titik balik. Diagram berikut menunjukkan grafik $y=f(x)$, dengan f adalah sebuah fungsi yang diferensiabel.



Gambar 2. Ilustrasi Letak Lokal Maksimum dan Minimum

Berdasarkan diagram nampak bahwa garis singgung grafik pada titik-titik yang merupakan maxima lokal atau

minima lokal adalah horizontal. Titik a adalah maksimum lokal, dan titik b adalah minimum lokal.

Misalkan f adalah fungsi yang diferensiabel, maka titik stasioner pada f adalah sebuah bilangan x yang sedemikian rupa sehingga $f'(x)=0$.

Teorema: Jika fungsi f memiliki nilai ekstrim relatif $f(c)$ pada suatu interval, maka c adalah nilai kritis, sehingga $f'(c)=0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

J. Uji Turunan Pertama untuk Lokal Maksimum dan Lokal Minimum

Turunan pada sebuah fungsi dapat digunakan untuk menentukan kapan titik lokal maksimum atau lokal minimum terjadi.

Teorema: Misal f merupakan fungsi yang dapat diturunkan, dan c adalah titik stasioner, maka $f'(c)=0$.

1. Jika $f'(c)=0$ dengan $f'(x)>0$ tepat disebelah kiri dari c dan $f'(x)<0$ tepat disebelah kanan dari c , maka c adalah titik lokal maksimum.
2. Jika $f'(c)=0$ dengan $f'(x)<0$ tepat disebelah kiri dari c dan $f'(x)>0$ tepat disebelah kanan dari c , maka c adalah titik lokal minimum.

Contoh 12

Carilah titik lokal maksimum dan minimum dari fungsi $f(x)=x^3-3x+5$.

Jawab

Turunan pertama $f'(x)=3x^2-3$. Pada $f'(x)=0$, diperoleh nilai titik kritis yaitu $x=1$ dan $x=-1$. Karena $f(1)=3$, dan $f(-1)=7$,

maka diperoleh bahwa $x=1$ adalah lokal minimum, dan $x=-1$ adalah lokal maksimum.

Terdapat dua jenis titik stasioner lainnya, yaitu

1. Jika $f'(c)=0$ dengan $f''(x)>0$ pada kedua sisi c , maka c adalah titik stasioner infleksi
2. Jika $f'(c)=0$ dengan $f''(x)<0$ pada kedua sisi c , maka c adalah titik stasioner infleksi.

Contoh 13

Carilah titik-titik stasioner dari $f(x)=3x^4+16x^3+24x^2+3$.

Jawab

Turunan dari f adalah

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4)3x^{4-1} + (3)16x^{3-1} + (2)24x^{2-1} \\ &= 12x^3 + 48x^2 + 48x \end{aligned}$$

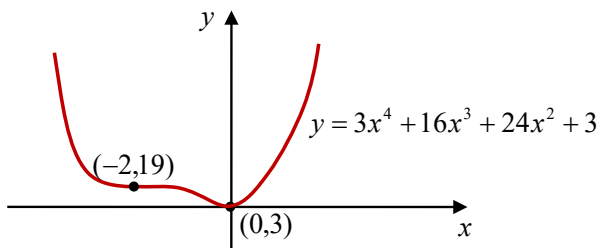
Dari sini diperoleh bahwa $f'(x)=0$, memberikan $x=0$ atau $x=-2$.

- Jika $x < -2$, maka $f'(x) < 0$.
- Jika $-2 < x < 0$, maka $f'(x) < 0$.
- Jika $x > 0$, maka $f'(x) > 0$.

Ketiga pernyataan ini dapat dibuat dalam bentuk diagram sebagai berikut:

Nilai		-2		0	
Tanda	-	0	-	0	+
Kemiringan grafik	\	—	\	—	/

Titik-titik stasioner di $x=0$ dan $x=-2$ yaitu lokal minimum di $x=0$ dan titik stasioner infleksi di $x=-2$.



K. Penggunaan Turunan Kedua

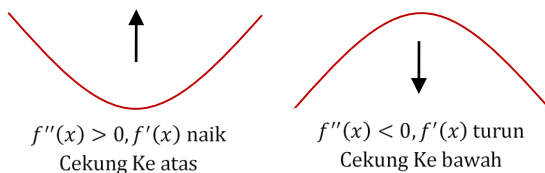
Turunan kedua pada suatu fungsi f dituliskan f'' . Dengan menggunakan notasi Leibniz, turunan kedua dituliskan sebagai $\frac{d^2y}{dx^2}$, yaitu y adalah fungsi dari x .

1. Kecekungan

Misal f adalah fungsi yang turunannya ada di setiap titik dalam selang terbuka I . Maka f cekung ke atas pada I jika f' meningkat terhadap I dan f cekung ke bawah pada I jika f' menurun terhadap I .

Teorema: Uji kecekungan

- a. Jika $f''(x) > 0$ pada selang I , maka grafik f cekung ke atas. f' meningkat, jadi f naik pada I
- b. Jika $f''(x) < 0$ pada selang I , maka grafik f cekung ke bawah. f' menurun, jadi f turun pada I



Gambar 3. Ilustrasi Kecekungan

2. Lokal maksimum dan minimum

Teorema: Misal f dapat diturunkan untuk setiap x pada interval (a,b) dan ada nilai kritis c dalam (a,b) untuk itu $f'(c)=0$, maka

- a. $f(c)$ adalah lokal maksimum jika $f''(c) < 0$
- b. $f(c)$ adalah lokal minimum jika $f''(c) > 0$

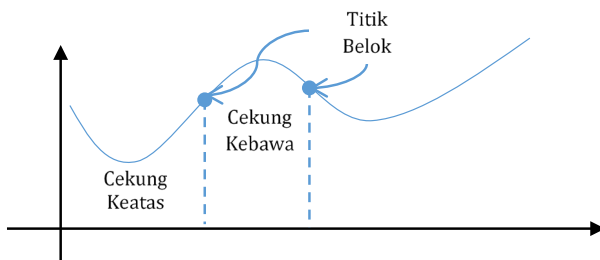
Contoh 14

Carilah lokal maksimum fungsi $f(x)=2x^3+6x^2-18x$

Jawab

Mencari titik kritis, $f'(x)=6x^2+12x-18$ dan $f''(x)=12x+12$. Pada $f'(x)=0$, diperoleh $x=-3$ dan $x=1$. Substitusi nilai kritis pada $f(x)$ diperoleh $f(-3)=14$ dan $f(1)=-18$. Sehingga diperoleh $(-3,14)$ dan $(1,-18)$. Untuk menguji apakah ini lokal maksimum, substitusi nilai x pada $f''(x)$ dan diperoleh $f''(-3)=-12<0$, yang berarti lokal maksimum dan $f''(1)=12>0$, yang berarti lokal minimum. Jadi, $f(-3)=14$ adalah lokal maksimum dan $f(1)=-18$ adalah lokal minimum.

- 3. Titik Belok, adalah titik di mana arah kecekungan berubah. Teorema: Jika suatu fungsi f memiliki titik belok, maka fungsi itu harus terjadi di titik x_0 , dengan $f(x_0)=0$ atau $f''(x_0)$ tidak ada.



Gambar 4. Ilustrasi titik belok

Contoh 15

Carilah titik belok dari fungsi $f(x)=x^4-6x^3$.

Jawab

Untuk mencari titik infleksi pada fungsi $f(x)$ adalah dengan melakukan pemfaktoran dari turunan kedua $f''(x)$, yaitu $f''(x)=12x^2-36x=0$. Dari sini diperoleh $x=0 \rightarrow f(0)=0$ dan $x=3 \rightarrow f(3)=-18$. Jadi titik beloknya adalah $(0,0)$ dan $(3,-18)$.

L. Nilai Maksimum dan Minimum Absolut

Jika f adalah suatu fungsi dengan domain D , maka $f(c)$ adalah maksimum absolut jika $f(c) \geq f(x)$ dan minimum absolut jika $f(c) \leq f(x)$, untuk semua x dalam domain tersebut. Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum absolut, dapat digunakan teorema nilai ekstrim.

Teorema: Suatu fungsi kontinu f yang didefinisikan pada interval tertutup $[a,b]$ harus memiliki nilai maksimum absolut dan minimum absolut pada $[a,b]$:

1. Mencari turunan pertama fungsi f , $[f'(x)]$
2. Mencari nilai kritis dalam $[a,b]$

3. Substitusi setiap nilai kritis pada fungsi f
4. Nilai terbesar yang diperoleh adalah maksimum absolut, dan nilai terkecil adalah minimum absolut.

Contoh 16

Carilah nilai maksimum dan minimum absolut fungsi $f(x)=x^4-2x^3$ pada interval $[-2,0]$

Jawab

Mencari $f'(x)$: $f'(x)=4x^3-6x^2$. Seting $f'(x)=0$, diperoleh $4x^3-6x^2=2x^3-3x^2=x^2(2x-3)=0$. Maka $x=0$ dan $x=\frac{3}{2}$. Nilai kritisnya adalah 0 dan $\left(x=\frac{3}{2}\right)$ bukan nilai kritis karena tidak berada dalam interval $[-2,0]$, dan nilai ujungnya adalah -2 dan 0. Substitusi setiap nilai ini ke $f(x)$, diperoleh $f(-2)=32$ (maksimum); $f(0)=0$ (minimum); $f(2)=0$ (minimum). Jadi, maksimum absolut adalah 32 di $x=-2$, dan minimum absolut adalah 0, di $x=-2$ dan $x=0$.

Contoh 17

Carilah nilai maksimum dan minimum absolute dari fungsi $f(x)=2x^3+8x^2+8$ pada interval $[-2,0]$.

Jawab

(i) Mencari $f'(x)=6x^2+16x$; (ii) Mencari nilai kritis, $f'(x)=x(6x+16)=0 \rightarrow x=0$ dan $x=-\frac{8}{3}$; (iii) mencari nilai f pada setiap nilai x . Pada $f(-4)=8$; $f(1)=18$; $f(0)=8$; dan $f\left(-\frac{8}{3}\right)=26,96$. Jadi, titik maksimum absolut fungsi $f(x)$ adalah $\left(-\frac{8}{3}, 26,96\right)$, dan minimum absolut adalah $(-4,8)$ dan $(0,8)$.

M. Persoalan Maksimal dan Minimal

Langkah – langkah menyelesaikan persoalan maksimum dan minimum adalah sebagai berikut:

1. Gambarkan diagram untuk mengilustrasikan masalah. Beri label diagram dan tentukan variabel dan konstanta.
2. Tulis besaran untuk kuantitas yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan. Hilangkan beberapa variabel. Bentuk persamaan untuk kuantitas ini dalam hal variabel independen tunggal.
3. Jika $y=f(x)$ adalah besaran yang akan dimaskimalkan atau diminimalkan, carilah nilai x untuk $f'(x)=0$
4. Uji setiap titik untuk $f'(x)=0$ untuk menentukan apakah itu lokal maksimum, lokal minimum, atau lainnya.
5. Jika fungsi $y=f(x)$ terdefinisi pada interval, seperti $[a,b]$ atau $[0,\infty]$, periksa nilai fungsi di titik terakhir.

Contoh 18

Tentukan luas persegi panjang dengan keliling 1000 m agar luas persegi panjang tersebut maksimal.

Penyelesaian

Misal panjang persegi panjang adalah x m, lebar y m, dan luas A m², seperti pada gambar 5.



Sumber gambar: <https://www.99.co/blog/indonesia/tata-guna-lahan/>

Keliling persegi panjang adalah 1000 m, maka

$$1000 - 2x + 2y$$

Dari sini diperoleh $y = 500 - x$. Karena $A = xy$, maka

$$A(x) = x(500 - x) = 500x - x^2$$

Nilai x harus memenuhi $0 \leq x \leq 500$. Karena $A(x)$ terdiferensial, maka nilai maksimum harus terjadi di titik akhir atau titik stasioner.

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}(500x - x^2) = 500 - 2x$$

Nilai maksimum terjadi pada $\frac{dA}{dx} = 0$. Sehingga

$$0 = 500 - 2x$$

$$x = 250$$

Kemungkinan nilai A akan maksimum di $x=0$, $x=250$, dan $x=500$. Untuk $x=0$, maka $A(x)=0$ dan $x=500$, maka $A(500)=0$. Sementara untuk x , diperoleh $x=250$. Jadi, nilai maksimum A terjadi pada $x=250$. Persegi panjang tersebut adalah persegi dengan panjang sisi 250 m dan luas maksimum adalah 62.500 m^2 .

Contoh 19

Sebuah tangki air berbentuk silinder diletakan di atas permukaan tanah dengan jari-jari alas 30 cm. Hitunglah laju turun permukaan air jika dikuras pada $35 \text{ cm}^3/\text{detik}$.

Jawab

Laju perubahan volume air adalah $\frac{dV}{dt} = -35$. Volume air yang keluar pada waktu t adalah $V = \pi r^2 h = 900\pi h$. Jadi,

$$\frac{dV}{dt} = 900\pi \frac{dh}{dt} = -35$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{35}{900\pi} = -\frac{7}{180\pi}$$

Jadi, permukaan air berkurang dengan laju sekitar 0,01 cm/detik.

N. Latihan

- Carilah turunan dari fungsi: (i) $f(x) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x$; (ii) $f(x) = \sqrt{x}$
- Carilah turunan dari fungsi $f(x) = \frac{1 + 2 \log x}{x^2 + 3}$
- Carilah turunan invers dari fungsi: (i) $x^3 + 1$; (ii) $f(x) = \cos^{-1}x$; (ii) $f(x) = \sin^{-1}x$
- Carilah nilai minimum dan maksimum absolute pada interval tertutup fungsi: (i) $f(x) = 10 - 4x^2$; $[-3, 1]$ (ii) $f(x) = 14x^2 + 4$; $[-1, 2]$
- Carilah titik kritis, titik lokal minimum dan lokal maksimum dari fungsi – fungsi: (i) $f(x) = -4x^2 + 8x + 6$; (ii) $f(x) = 2x^2 + 12x + 20$; (iii) $f(x) = x - 2\sin x$; $[0, 2\pi]$
- Carilah titik belok dari fungsi: (i) $f(x) = 8 - 2x - 6x^4$; (ii) $f(x) = 2 - 7x^4$.
- Sebuah kotak terbuka dengan alas berbentuk persegi (misal sisi alas x) dan luas permukaan 108 inci persegi. Jika tinggi kotak adalah t , tentukan nilai x dan t , agar volume kotak maksimum.

DAFTAR PUSTAKA

- Adrian, W. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.
- As'ari A.R, Tohir M, Valentino E, Imron Z, Taufiq I. (2017) *Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester I*. Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*. New York: Wiley
- Bittinger, M. L., Ellenbogen, D. J., & Surgent, S. A. (2012). *Calculus And Its Applications*, (10th Edition ed.). Addison-Wesley.
- Dawkins, P. (2011). *Calculus I*. Texas: Lamar University.
- Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.
- Foter, Bob. 2006. *Soal dan Pembahasan Relasi*. Jakarta: Erlangga.
- Gozali, M.S. (2010). *Analisis Real 1*. Bandung: UPI
- Hariyono Rudi. 2005. *Pintar Matematika SMA*. Jakarta: Gitamedia Press.
- Karso. (2017). *Pengantar Dasar Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Larson, R., & Edwards, B. (2016). *Calculus* (11st Edition ed.). Boston, USA: Cengage Learning.
- Markaban dkk. (2007). *Matematika SMK/MAK kelas X*, Klaten. Saka Mitra Kompetensi P.T Macanan Jaya Cemerlang.
- Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan*. (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Murniati, Endyah. (2012). *Mengajarkan Matematika dengan Fun*. Yogyakarta : Mentari Pustaka.

- Noormandiri, B. (2017). *Matematika untuk SMA/MA Kelompok Wajib*. Jakarta : PT Erlangga.
- Nugroho., B, Harahap. (1985). *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta. Ghalia Indonesia.
- Purcell, E. d. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitik Jilid I, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Purnomo, Yoppy Wahyu. (2014). *Serial Matematika untuk PGSD Bilangan Cacah dan Bilangan Bulat*. Bandung : Alfabeta.
- Rifa, Iva. (2012). *Koleksi Games Edukatif di dalam dan Luar Sekolah*. Jogjakarta : FlashBooks.
- Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.
- Subhan, Muhammad. (2017). *Analisis Real 1*. Padang: UNP
- Sudianto. (2017). *Matematika untuk SMA/MA kelas 11*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- Sukirman, d. (2017). *Matematika*. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.
- Susila.N. (2001). *Kalkulus Jilid I Edisi ke Tujuh*. Interaksara.
- Stewart, J. (2016). *Calculus* (8th Edition ed.). Boston: MA: Brooks/Cole.
- Tim PPPG Matematika. 2004). *Aritmetika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.
- Wade, W.R. (2000), *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall
- Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit Ed. 02*. Jakarta: Graha Ilmu.
- Wirodikromo, S. (2004). *Matematika untuk SMA*. Jakarta : Erlangga.

BIODATA PENULIS



Nasruddin, S.Pd., M.Si. lahir di Kolaka tepatnya Sani-sani, 09 September 1988. Tinggal di dusun 1 Sani-sani Desa Lawulo Kecamatan Samaturu Kabupaten Kolaka - Sulawesi Tenggara. Setelah selesai pada jenjang SMA tahun 2006, kemudian melanjutkan pendidikan untuk gelar Sarjana di Universitas 19 November Kolaka (USN Kolaka) mengambil Jurusan Pendidikan Matematika lulus pada tahun 2010. Pada tahun 2013 melanjutkan Magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya dengan konsentrasi bidang Matematika Terapan dan lulus pada tahun 2015. Sejak tahun 2011 menjadi Dosen kontrak di USN Kolaka kemudian menjadi dosen tetap pada program studi pendidikan matematika FKIP-USN Kolaka tahun 2016 sampai sekarang. Saat ini aktif melakukan penelitian dibidang pendidikan matematika dan berbagai kegiatan pengabdian kepada masyarakat.



Junaedi, S.Pd., M.Pd., lahir di Pamboang pada tanggal 14 Agustus 1987. Anak ke 6 (enam) dari 8 (delapan) bersaudara dan merupakan buah dari cinta pasangan H. Abdul Latif dan Hj. Nurbaeti. Penulis memulai pendidikan sekolah dasar di SDN

3 Tinambung (1994-2000). Pada tahun yang sama penulis melanjutkan di SMP Negeri 1 Pamboang (2000-2003). Kemudian penulis melanjutkan

pendidikan di SMU Negeri 3 Majene (2003-2006). Penulis diterima di Jurusan Pendidikan Matematika Program Sarjana (S1) Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam STKIP Cokroaminoto Pinrang (2006-2010). Penulis melanjutkan pendidikan di Program Studi Pendidikan Matematika, Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar (2012-2014). Beberapa pengalaman mengajar yaitu Dosen di Amik Tomakaka Majene (2009-2020), Dosen di Universitas Sulawesi Barat (2011-2013), Tutor Pendidikan Matematika dan Statistika Pendidikan di UT UPBJJ Majene (2014-sekarang), Dosen di STIKes Bina Bangsa Majene (2015-sekarang), Dosen Magang Universitas Gadjah Mada (2018), dan Dosen Tetap di Institut Agama Islam Darud Da'wah Wal-Irsyad Polewali Mandar. Beberapa mata kuliah yang diampu diantaranya adalah Matematika Dasar, Statistika Pendidikan, Biostatistik Deskriptif dan Inferensial, Analisis dan Pengembangan Kurikulum, dan lain-lain. Email aktif adalah junaedi.latif@gmail.com dan junaedi@ddipolman.ac.id.



Dr. Rahmy Zulmaulida, M.Pd., lahir di Bireuen 24 Oktober 1988. Dari ayah bernama Zulkifli Wariji dan Ibu bernama Zulaida Dewa. Ia memiliki Suami bernama Dr. Edy Saputra, M.Pd, dan telah dikaruniai dua anak laki-laki yang bernama Muhammad Danish Al-Khairi dan Muhammad Daris Arkan.

Penulis bertempat tinggal di Desa Blang Kolak asli Kecamatan Bebesen Kabupaten Takengon Aceh Tengah Provinsi Aceh. Telah menyelesaikan studi strata satu di Program Studi Pendidikan Matematika (2006-2010). Lulus strata dua di Sekolah Pasca Sarjana Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia Bandung (2010-2012) dan Lulus strata tiga di Sekolah Pasca Sarjana Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia Bandung (2014-2017).

Karirnya dimulai sebagai dosen tetap Universitas Al-Muslim (2012-2017). Dosen tetap di IAIN Lhokseumawe sejak 2017 hingga sekarang dan sedang menjabat menjadi sekretaris Lembaga Penjaminan Mutu IAIN Lhokseumawe sejak 2020.



Lisa, S.Si., M.Pd., lahir di Rantau Kuala Simpang 8 Januari 1977. Dari ayah bernama Burhanuddin dan Ibu bernama Nurlela. Ia memiliki seorang suami bernama Kasuma Indra, ST. Penulis bertempat tinggal di Komplek Perumahan PIM, Kecamatan Dewantara Kabupaten Aceh Utara Provinsi Aceh. Telah menyelesaikan studi strata satu di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Syiah Kuala Banda Aceh (1995-2000). Lulus strata dua di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan (2010-2012).

Karirnya dimulai sebagai dosen tetap di Institut Agama Islam Negeri Lhokseumawe (2009-sekarang). Guru SMAS Iskandar Muda (2008-2009). Dosen tetap Universitas Abulyatama Banda Aceh (2000-2002)..

Bidang kajian yang menjadi tanggungjawab penulis di adalah Kalkulus Diferensial, Kalkulus Integral, Kalkulus Peubah Banyak, Analisis Real, Bilangan Kompleks, Matematika Dasar, Statistika, Statistik Pendidikan dan Ekonometrika di Institut Agama Islam Negeri Lhokseumawe.

Buku yang telah dihasilkan antara lain: Kalkulus Lanjutan, dan Analisis Real. Selain menulis buku, penulis juga aktif dalam aktivitas penelitian dan pengabdian kepada masyarakat serta menjadi pemakalah dalam seminar nasional/internasional. Tulisannya juga diterbitkan dalam jurnal ilmiah, seperti : Sarwah: Journal of Islamic Civilization and Thought , ITQAN: Jurnal Ilmu-Ilmu Kependidikan, Seminar Nasional Pendidikan 2020, Ar-Riyadhiyyat, Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami, Proceedings ICMIs 2018, Bunayya : Jurnal Pendidikan Anak dan lain sebagainya.



La Ode Asmin, S.Si., M.Sc. Lahir dan dibesarkan di desa bagian timur Kabupaten Muna tepatnya di desa Pola tanggal 26 Desember 1988. Menempuh pendidikan dasar dari SD sampai SMA di Pola Kecamatan Pasir Putih. Melanjutkan pendidikan S-1 tahun 2007 dan Lulus di Program Studi Fisika FMIPA Universitas Halu Oleo (UHO) tahun 2012. Lulus S2 di Program Pascasarjana Ilmu Fisika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta tahun 2015. Sejak kuliah S1 aktif sebagai Koordinator Praktikum di Laboratorium Dasar Unit Fisika UHO. Karir mengajar dimulai sejak tahun 2016 sebagai dosen tetap Bukan-PNS Program Studi Tadris Fisika Fakultas

Tarbiyah dan Ilmu Keguruan IAIN Kendari dan terangkat menjadi PNS tahun 2020. Mengampu mata kuliah Fisika Dasar, Fisika Matematika, Fisika Kuantum dan Gelombang dan Optik.