

ANALISIS TEGANGAN PADA PENAMPANG BETON DENGAN METHODA ELEMEN HINGGA

Tesis

**untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Magister**

Program Studi Magister Teknik Sipil



AHMAD YANI
0047.09.02.2010

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS MUSLIM INDONESIA
MAKASSAR
2020**

Tesis
**ANALISIS TEGANGAN PADA PENAMPANG BETON DENGAN
METHODA ELEMEN HINGGA**

AHMAD YANI
0047.09.02.2010

telah dipertahankan di hadapan Tim Penguji
pada tanggal **11 Juni 2020**
dan telah diperbaiki

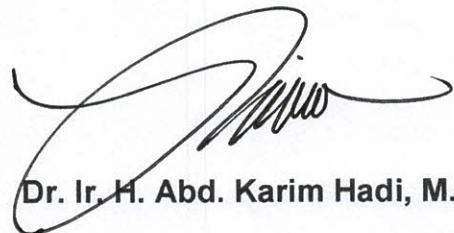


Ketua,



Dr. Ir. H. Hanafi Ashad, MT.

Anggota,



Dr. Ir. H. Abd. Karim Hadi, M.Sc.

Makassar,
Program Studi Magister Teknik Sipil
Ketua,



Dr. Ir. Ratna Musa, MT.

ANALISIS TEGANGAN PADA PENAMPANG BETON DENGAN METHODA ELEMEN HINGGA

AHMAD YANI
0047.09.02.2010

telah diujikan pada tanggal **11 Juni 2020**
dan dinyatakan telah memenuhi syarat



Susunan Tim Penguji

Ketua

Dr. Ir. Ratna Musa, MT.

Dr. Ir. H. Abd. Karim Hadi, M.Sc.

Dr. Ir. H. Hanafi Ashad, MT.

Dr. Ir. H. Winarno Arifin, M.Sc.

Dr. Ir. Ali Mallombasi, MT.

Makassar,
Program Pascasarjana UMI
Direktur,

Prof. Dr. Baharuddin Semmaila

ABSTRAK

ANALISIS TEGANGAN PADA PENAMPANG BETON DENGAN METHODA ELEMEN HINGGA

Ahmad yani⁽¹⁾, Hanafi Ashad⁽²⁾, Abdul Karim Hadi⁽³⁾

(1) Mahasiswa Program Magister Teknik Sipil PASCASARJANA Umi

(2) Dosen Program Magister Teknik Sipil Pps Umi

(3) Dosen Program Magister Teknik Sipil Pps Umi

Secara umum analisa tegangan pada penampang beton dengan metoda elemen hingga dapat dijumpai pada beberapa macam analisa jenis tegangan. Salah satunya adalah perilaku struktur pada balok beton, baik pada pembebanan vertikal maupun horizontal yang memerlukan analisis struktur balok beton yang signifikan. Saat ini banyak metoda yang digunakan untuk menurunkan persamaan elemen hingga untuk analisis penampang balok beton, salah satu pendekatan yang dilakukan untuk menurunkan persamaan elemen yaitu metoda kekakuan. Daerah penampang beton yang dianalisis dapat mempunyai bentuk, beban dan kondisi batas yang bervariasi. Kemudahan penggunaan metode elemen hingga untuk berbagai hal tersebut bisa tergabung dalam suatu program komputer serba guna yang dapat menyiapkan data pemilihan jenis, geometri, kondisi batas dan sebagainya. Pada metode elemen hingga titik-titik elemen akan beralih tempat, sehingga terjadi suatu peralihan tempat atau displacements. Peralihan adalah suatu vektor dan karenanya secara umum mempunyai tiga komponen ialah: u , v , dan w . Ketiga besaran skalar ini didekati dengan fungsi yang merupakan fungsi interpolasi antara peralihan titik-titik nodal yang dipilih pada tepi elemen. Rumusan masalah dalam penelitian ini, yaitu (1) Bagaimana penerapan metoda elemen hingga pada perhitungan tegangan penampang balok beton? dan (2) Berapa besar tegangan yang terjadi pada penampang balok beton apabila diberikan gaya – gaya luar atau pembebanan baik horizontal maupun vertikal?

Tujuan dari penelitian ini adalah (1) Memperkenalkan metoda elemen hingga pada balok tinggi (deep beam) dengan perbandingan antara tinggi dan bentang lebih dari $2/5$ untuk balok menerus dan lebih dari $4/5$ untuk balok atas dua tumpuan dan (2) Mengidentifikasi selisih besaran tegangan yang terjadi dalam menganalisa penampang beton (balok) dengan metoda elemen hingga.

Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa besaran tegangan yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 mempunyai besaran yang berbeda, tetapi dengan bahan yang sama. Besaran tegangan dan sifat yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 mempunyai besaran dan sifat yang berbeda.

Kata kunci : Beton, Elemen Hingga, Tegangan, Penampang.

ABSTRACT

STRESS ANALYSIS OF CROSS SECTION OF CONCRETE USING FINITE ELEMENT METHODS

Ahmad Yani⁽¹⁾, Hanafi ashad⁽²⁾, Abdul Karim Hadi⁽³⁾

(1) Student of Postgraduate Master Program of Civil Engineering UMI

(2) Lecturer of Postgraduate Master Program of Civil Engineering UMI

(3) Lecturer of Postgraduate Master Program of Civil Engineering UMI

In general, stress analysis on concrete sections using a finite element method can be found in several types of stress analysis. One of them is the structural behavior of the concrete beam, both in vertical and horizontal loading which requires a significant analysis of the concrete beam structure. At present many methods are used to derive finite element equations for the analysis of concrete beam cross sections, one of the approaches taken to derive element equations is the stiffness method. The cross-sectional area analyzed can have varying shapes, loads and boundary conditions. The ease of use of the finite element method for various things can be incorporated in a multipurpose computer program that can prepare data for the selection of types, geometries, boundary conditions and so on. In the finite element method the points of the elements will switch places, resulting in a displacement. Transition is a vector and therefore generally has three components, namely u , v , and w . The three scalar quantities are approximated by a function which is an interpolation function between the transition of selected nodal points at the edge of an element. The research questions of the study are (1) How is the application of the finite element method to the stress calculations of the concrete beam cross section? and (2) What is the amount of stress that occurs in the cross section of a concrete beam when exerted external forces or both horizontal and vertical loading?

The objectives of this research are (1) Introducing the finite element method in deep beams with a ratio between height and span of more than $2/5$ for continuous beams and more than $4/5$ for two beam supports and (2) Identifying differences between the amount of stress that occurs in analyzing a concrete cross section with the finite element method.

The result of this study indicates that the amount of stress that occurs in element 1 and element 2 has a different magnitude, but with the same material. The magnitude of the stresses and properties that occur in element 1 and element 2 have different magnitudes and properties.

Keywords: Concrete, Finite Element, Stress, Cross section.

KATA PENGANTAR

Assalamu alaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh

Dengan memanjatkan puji dan syukur yang setinggi-tingginya kehadirat Allah SWT. Atas berkat dan rahmat yang dikaruniaNya, sehingga Penulis memperoleh kesehatan dan kekuatan lahir batin dalam penyelesaian tesis dengan judul : **Analisis Tegangan Pada Penampang Beton Dengan Methoda Elemen Hingga.**

Dalam menyelesaikan tesis ini penulis banyak menemukan berbagai kesulitan, namun berkat dorongan dan bantuan dari berbagai pihak . Oleh karena itu dengan penuh kerendahan hati Penulis menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya dan ucapan terima kasih kepada keluarga, Sahabat, dan seluruh Civitas Akademika Pasca Sarjana Univesitas Muslim Indonesia yang telah turut memberikan bantuan baik moril maupun materil.

Ucapan ini kami tujukan terutama kepada :

1. Ibu DR.Ir. Ratna Musa. MT selaku ketua program Pasca sarjana Teknik Sipil Universitas Muslim Indonesia
2. Bapak DR Ir.H.Hanafi Ashad MT dan Bapak DR Ir. H.Abdul Karim Hadi.Msc Selaku Komisi pembimbing dan Anggota Komisi pembimbing Staf dosen pengasuh serta staf tata usaha pada program pasca sarjana Teknik Sipil Universitas Muslim Indonesia .
3. Isteri yang tercinta dan seluruh keluarga yang telah banyak memberikan dorongan moril maupun materil,

semoga Allah SWT.Membalas budi baik yang telah diberikan kepada Penulis selama ini serta memohon perlindungan-Nya kepada kita semua. Amin

Makassar, Mei 2020

PENULIS

DAFTAR ISI

Halaman sampul	i
Halaman Judul	ii
Halaman Persetujuan Tesis.....	iii
Halaman Persetujuan Pembimbing.....	iv
Abstrak.....	v
Kata Pengantar	vii
Daftar Isi	viii
Daftar Tabel	xi
Daftar Gambar.....	xii

BAB I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	3
C. Tujuan Penulisan.....	4
D. Manfaat Penulisan.....	4
E. Batasan Masalah.....	4

BAB II . TINJAUAN PUSTAKA

A. Tinjauan Teori dan Konsep	5
A.1.Pengertian Analisis.....	5
A.2. Pengertian Tegangan	11

A.3. Macam – Macam Elemen	20
B. Penulisan terdahulu.....	23
C. Kerangka Pikir	25

BAB III. METODA PENELITIAN

A. Pendekatan dan Jenis Penelitian.....	26
A.1. Diskritisasi Susunan Struktur.....	26
A.2. Asumsi- Asumsi Dasar.....	27
B. Sistim Penomoran Titik Nodal Elemen.....	28
C. Langkah – Langkah Perhitungan.....	29
D. Formulasi Elemen Dua Dimensi.....	31
D.1. Geometri	31
D.2. Perpindahan.....	34
D.3. Regangan Elemen.....	36
D.4. Tegangan Elemen.....	38
E. Matriks Kekakuan.....	39
F. Solusi Persamaan.....	41
G. Pengelolaan Peran Sebagai Peneliti.....	42
H. Metoda Penulisan.....	43
I. Sumber Data	45
J. Teknik Pengumpulan Data.....	45

BAB IV. APLIKASI METODA ELEMEN HINGGA

A. Aplikasi Dengan Cara Manual	46
A.1. Pada Balok Tinggi (Deep Beam) Dengan Perbandingan Tinggi Dan Bentang Lebih dari 2/5 Untuk Balok Menerus di atas Dua Tumpuan....	47

A.1.1. Menentukan Titik Nodal.....	47
A.1. 2. Menghitung Kekakuan Lokal.....	52
A.1. 3. Menghitung Kekakuan Struktur.....	53
A.1. 4. Menghitung Perpindahan Titik	58
A.1. 5. Menghitung Tegangan Elemen.....	58
A.2. Pada Balok Tinggi (Deep Beam) Dengan Perbandingan Tinggi Dan Bentang Lebih dari 4/5 Untuk Balok Menerus di atas Dua Tumpuan....	67
A.2.1. Menentukan Titik Nodal.....	67
A.2. 2. Menghitung Kekakuan Lokal.....	72
A.2. 3. Menghitung Kekakuan Struktur.....	73
A.2. 4. Menghitung Perpindahan Titik	78
A.2. 5. Menghitung Tegangan Elemen.....	78
 BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
A. Kesimpulan	87
B. Saran	91
DAFTAR PUSTAKA.....	92

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Tabel Penelitian Terdahulu.....	23
Tabel 5.1. Tabel Tegangan Balok Beton Deep Beam dengan $b/h > 2/5$	89
Tabel 5.2. Tabel Tegangan Balok Beton Deep Beam dengan $b/h > 4/5$	90
Tabel 5.3. Selisih Tegangan Balok Beton $B/H > 2/5$ dan $B/H > 4/5$ Elemen 1 dan Elemen 2.....	90

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Bentuk Geometri Suatu Struktur.....	1
Gambar 1.2. Pembagian Elemen.....	2
Gambar 2.1.(a) (b) (c) Model Elemen	6
Gambar 2.1 (d) Fungsi Kombinasi	7
Gambar 2.2 Elemen Segitiga.....	9
Gambar 2.3 (a) (b) Contoh tegangan Bidang	13
Gambar 2.4 Struktur Dasar Tegangan Bidang.....	14
Gambar 2.5 Deformasi Elemen Tegangan.....	15
Gambar 2.6 (a) Struktur Bendung	16
Gambar 2.6 (b) Pipa memanjang.....	16
Gambar 2.7. Tegangan 2 Dimensi	18
Gambar 2.8 Penguraian Gaya.....	19
Gambar 2.9 (a) Struktur Portal	21
Gambar 2.9 (b) Struktur Rangka	21
Gambar 2.10. Elemen 3 dimensi.....	21
Gambar 2.11. Bagan Alir Perhitungan Tegangan Penampang Balok Beton.....	25
Gambar 3.1 Bentuk –bentuk Elemen.....	26
Gambar 3.2 Perpindahan Titik.....	27

Gambar 3.3 (a) (b) Penomoran Portal ke Arah Panjang dan Lebar.....	29
Gambar 3.4 Koordinat alami elemen 2 Dimensi.....	32
Gambar 3.5.bagan Alir Program Metoda Elemen Hingga.....	44
Gambar 4.1(a). Idealisasi struktur Tampak Depan.....	46

BAB I

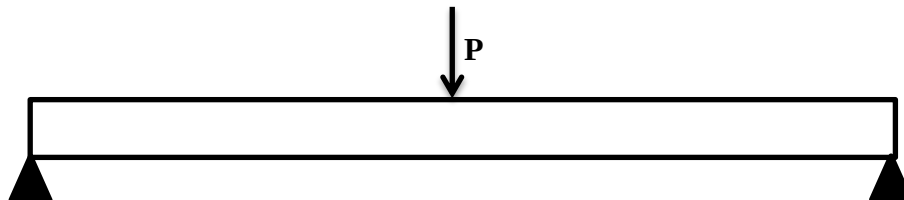
P E N D A H U L U A N

A Latar Belakang

Pesatnya perkembangan teknologi dewasa ini, membawa manusia pada pemikiran-pemikiran serta langkah-langkah yang lebih efisien. Melihat perkembangan bangsa Indonesia sebagai bangsa yang sedang membangun, maka pentinglah kiranya menguasai teknologi-teknologi masa depan yang akan mendukung perkembangan bangsa Indonesia menuju pada cita-cita bangsa yaitu masyarakat adil dan makmur.

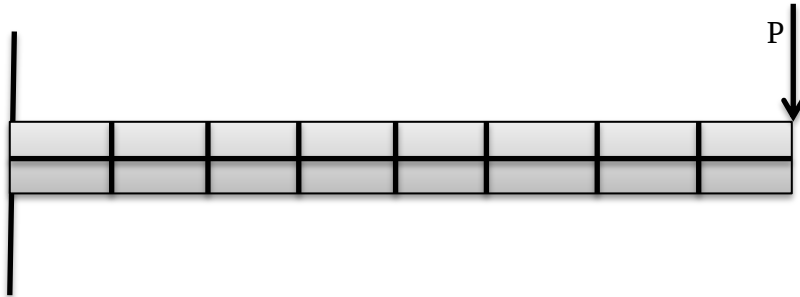
Dengan semakin berkembangnya teknologi komputer dan teknik analisa numerik, maka analisis struktur dapat dilakukan dengan semakin cepat, mudah dan akurat, seiring dengan perkembangan teknologi maka semakin banyak juga competitor dalam hal rancangan suatu struktur baik itu komponen-komponen mesin dan juga struktur rangka pondasi, desain dari suatu produk bukan hanya dilihat dari bentuk visual namun realibilitynya juga harus diperhitungkan, bentuk geometri suatu produk semakin rumit bentuknya, sehingga analisis dengan perhitungan yang dilakukan dengan metoda kekuatan material klasik tidak lagi akurat, tetapi harus dilakukan dengan pendekatan yang lebih mendekati aktualnya.

Sebagai contoh sederhana jika kita perhatikan suatu struktur dengan bentuk tidak seragam sebagai berikut



Gambar 1.1. Bentuk Geometri Suatu Elemen Struktur

Dan tentu saja perhitungan tegangan yang terjadi pada elemen tersebut tidak lagi menjadi sederhana, pendekatan yang dilakukan adalah dengan membagi komponen tersebut menjadi beberapa elemen sebagai berikut



Gambar 1.2. Pembagian Elemen

Dalam tesis ini kami membahas penerapan Metode Elemen Hingga, dalam hal menganalisis suatu struktur penampang beton. Ini memungkinkan oleh karena kemajuan teknologi saat ini, dimana penggunaan Metode Elemen Hingga untuk menganalisis suatu struktur semakin berkembang sejalan dengan penggunaan komputer yang makin populer baik keperluan ilmiah maupun untuk keperluan praktek di lapangan.

Konsep yang mendasari Metode elemen Hingga (Finite Element Method) bukanlah hal yang baru, karena prinsip "DISCRETIZATION" diperlukan hampir disemua bentuk usaha manusia. Dimana kita selalu membagi suatu fenomena menjadi bagian-bagian yang kecil, dan menyatukan kembali secara keseluruhan atau totalitas (global).

Solusi yang dihasilkan dalam penerapan metode ini merupakan solusi pendekatan karena dalam metode ini pengolahan data dilakukan secara numerik yaitu dengan merubah persoalan semula berupa suatu besaran global kontinum yang sebenarnya, dibentuk menjadi beberapa bagian elemen kecil dimana semua parameter elemen tersebut masih mempunyai besaran/angka numerik yang masih berhingga. Oleh karena itulah metode ini disebut "METODE ELEMEN HINGGA".

Dengan metode ini dapat diselesaikan problem struktur seperti deformasi, analisis tegangan dan regangan, tekuk, lentur, atau torsi. Sedangkan untuk problem yang non struktur misalnya aliran fluida, percobaan panas dan lain-lain. Metode ini sangat terasa bermanfaatnya terutama untuk problem-problem yang rumit dalam analisis numeric suatu kontinum.

B . Rumusan Masalah

Dalam menganalisa dengan metode elemen hingga terdapat berbagai jenis elemen yang dapat dipakai untuk dipilih berdasarkan jenis struktur serta keperluannya. Dalam Tesis ini hanya membahas *problem tegangan dan regangan bidang serta penyelesaian solusi-solusi persamaan berdasarkan jenis elemen dua dimensi*.

Berdasarkan latar belakang masalah maka rumusan masalah dalam penulisan ini adalah

1. Bagaimana penerapan metoda elemen hingga pada perhitungan Tegangan penampang Balok Beton.

Saat ini banyak metoda yang digunakan untuk menurunkan persamaan elemen hingga untuk analisis penampang balok beton, salah satu pendekatan yang akan dilakukan untuk menurunkan persamaan elemen yaitu Metoda kekakuan, matriks kekakuan sebuah balok dapat diturunkan dengan menggunakan sebuah elemen balok sederhana. Sebuah balok dapat diartikan sebagai sebuah elemen struktur yang mengalami pembebanan trasversal sehingga timbul momen lentur.

2. Berapa besar tegangan yang terjadi pada penampang balok beton apabila diberikan gaya – gaya luar atau pembebanan baik horizontal maupun vertical.

C . Tujuan Penulisan

1. Memperkenalkan methoda Elemen Hingga pada balok beton tinggi (deep beam) dengan perbandingan antara tinggi dan bentang lebih dari $2/5$ dan lebih dari $4/5$ untuk balok menerus di atas dua tumpuan.
2. Mengidentifikasi selisih besaran tegangan yang terjadi dalam menganalisa penampang beton(balok) dengan methoda elemen hingga.

D. Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan secara praktis adalah :

1. Dapat menjadi bahan pertimbangan bagi penentu kebijakan untuk kembali mengevaluasi kinerja structure Engineer pada kekokohan struktur suatu bangunan dengan penampang beton sebagai stuktur utamanya atau main structure .
2. Dapat menjelaskan setiap permasalahan – permasalahan yang mengakibatkan timbulnya keruntuhan structure suatu bangunan gedung

E . BATASAN MASALAH

Adapun batasan masalah dalam penulisan ini adalah

1. Penampang balok beton dari bahan yang elastis homogen, isotropic, terletak sepanjang tiga sisi dan terjepit disisi lainnya.
2. Pembebanan yang digunakan adalah pembebanan vertikal.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Tinjauan Teori dan Konsep

Mengacu pada judul yang dikemukakan maka perlu penjelasan terkait makna komponen judul sebagai berikut

A.1. Pengertian Analisis

Pengertian Analisis adalah perbuatan menganalisa, sedangkan menurut beberapa ahli bahwa analisis adalah suatu perbuatan mempraktekan suatu rumusan yang merupakan cara pendekatan untuk menganalisa sebuah permasalahan dalam rekayasa struktur (Sugiyono,2010)

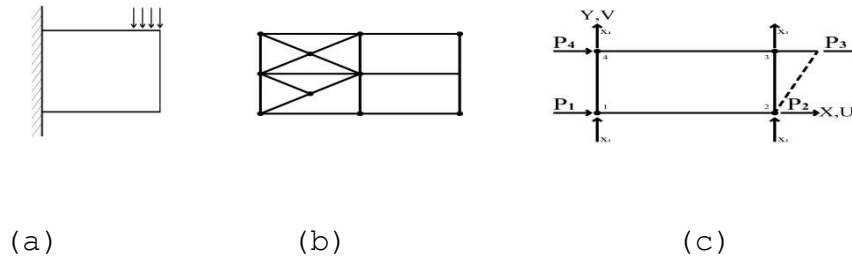
Metode elemen hingga adalah merupakan suatu prosedur numerik untuk memecahkan masalah mekanik kontinum dengan ketelitian yang dapat diterima. Hal ini dapat dilakukan karena metode elemen hingga adalah pembagian suatu kontinum menjadi beberapa bagian lebih kecil dan proses pembagian ini disebut proses "Diskritisasi". (Alisjahbana.W.Sosia, 2016)

Proses diskritisasi ini mencakup prinsip-prinsip :

- Pembagian
- Kesenambungan (Continuity)
- Kompatibilitas
- Konvergensi
- Kesalahan/Penyimpangan

Pada umumnya prinsip pembagian dapat diterapkan untuk semua hal, segala sesuatu selalu dapat dibagi-bagi menjadi satuan yang lebih kecil. Pada gambar

2.1.b.diperlihatkan model dari pada elemen hingga. Daerah yang merupakan bentuk bidang segi tiga dan segi empat adalah elemen hingga tersebut.



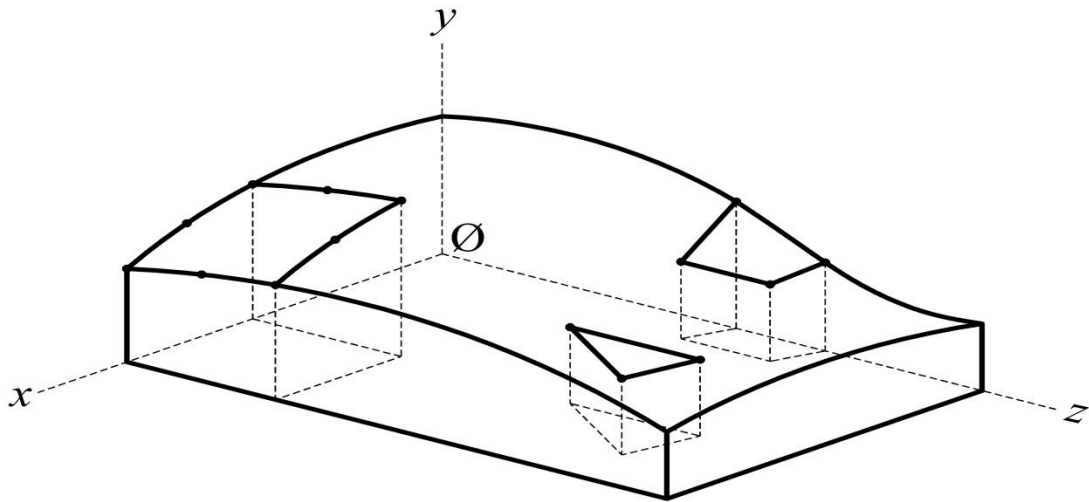
Gambar 2.1. Model Elemen

Titik-titik hitam adalah titik simpul (node), dimana elemen yang satu berhubungan dengan yang lainnya. (Hutahaen Yohanes Chandra,2015)

Untuk mengformulasikan suatu elemen, kita harus mencari gaya-gaya titik simpul (nodal Force) yang menghasilkan berbagai ragam deformasi elemen.

Didalam bidang suatu elemen segi empat pada gambar 2.1.d.diperlihatkan juga bahwa metode elemen hingga tidak dibatasi pada masalah-masalah mekanika struktur saja, hal ini dijelaskan melalui permukaan yang berubah secara halus dapat didekati dengan permukaan yang datar.

Elemen yang bertitik simpul empat dan delapan, masing-masing dengan permukaan terpilin dan lengkung, merupakan pendekatan yang baik ke fungsi situasinya dan pendekatan ini akan semakin baik apabila elemen yang digunaknn semakin banyak. Parameter yang dapat menimbulkan keruntuhan suatu struktr dalam penerapan methoda elemen hingga beberapa diantaranya adalah deformasi lentur yang biasa disebut dengan perpindahan transversal dan rotasi,; parameter yang lainnya adalah momen lentur dan gaya geser yang dapat dinyatakan sebagai fungsi dari perpindahan transversal dan rotasi.



Gambar 2.1.d. Fungsi
Kombinasi $\phi = \phi(X,Y)$ untuk pendekatan

ϕ adalah fungsi linear dari X dan Y. elevansi dan inklinasi elemen dapat didefinisikan dengan tiga harga titik simpul dari ϕ . Dua elemen tidak harus mempunyai elevasi dan kemiringan yang sama.

Sketsa tersebut memperlihatkan esensi metode elemen hingga yaitu pendekatan bagian demi bagian untuk fungsi ϕ dengan menggunakan polinomial, yang mana masing-masing terdefinisi pada daerah (elemen) yang kecil dan dinyatakan dalam harga-harga titik simpul dari fungsi tersebut.

Metode elemen hingga ini dapat dipakai untuk memecahkan berbagai masalah. Dimana daerah yang akan dianalisis dapat mempunyai bentuk, beban dan kondisi batas yang sembarang. Kemudahan penggunaan untuk berbagai hal tersebut bisa saja tergabung dalam suatu program komputer serba guna yaitu menyiapkan data pemilihan jenis, geometri, kondisi batas dan sebagainya. (Nasution Amrinsyah, 2010)

Saat ini banyak metoda yang digunakan untuk perhitungan perhitungan tegangan dan regangan. Metoda yang digunakan untuk melakukan perhitungan adalah dengan menggunakan Metoda Elemen Hingga, penggunaan metoda elemen hingga secara umum terdapat tiga pendekatan yang dilakukan untuk menurunkan persamaan elemen yaitu:

1. Metoda Kekakuan.

Pada metoda ini matriks kekakuan dan persamaan elemen berkaitan dengan gaya dan nodal perpindahan nodal diperoleh dari kondisi keseimbangan elemen dasar. Karena metoda ini secara mudah dapat diterapkan pada elemen satu dimensi, maka pada thesis ini akan digunakan matriks kekakuan, elemen pegas, bar dan balok.

2. Metoda Energi

Metoda ini untuk menurunkan matriks kekakuan elemen dua atau tiga dimensi. Prinsip kerja semu, prinsip energi potensial minimum dan Theorema Castiglano adalah metoda yang paling sering digunakan untuk menurunkan persamaan elemen.

Metoda Energi π didefinisikan sebagai suatu fungsi dan $f(x, y)$ merupakan fungsi dari variabel x dan y , maka π dapat menjadi $\pi = (f(x))$ dimana π merupakan fungsi dari f . Bentuk yang lebih umum yang tergantung dari dua variabel bebas $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ dinyatakan dalam

$$\Pi = \iint F(x, y, u, v, U_x, U_y, U_z, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}) dx dy, \dots \dots \dots (2.1)$$

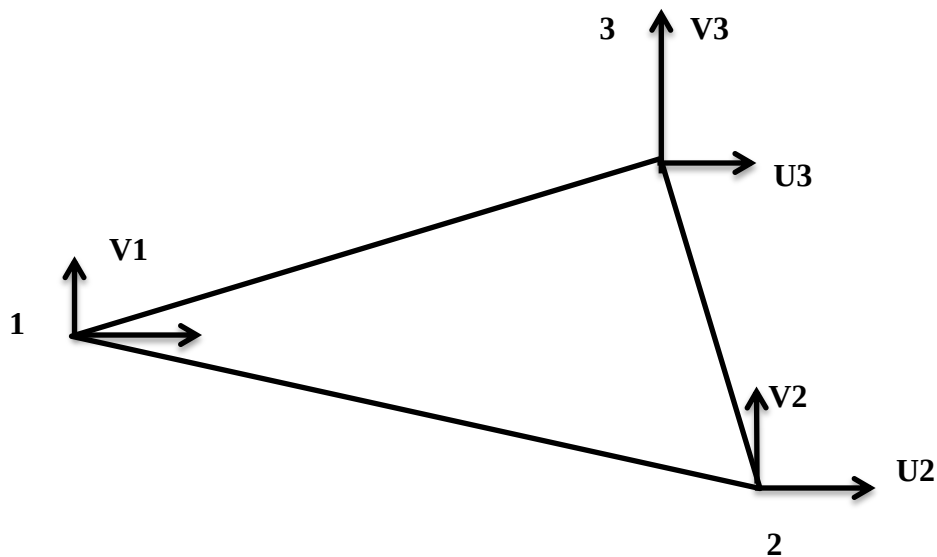
3. Metoda Residu Berbobot

Metoda Galerkin adalah metoda yang banyak digunakan. Metoda ini menghasilkan hasil yang sama seperti metoda energi. Khususnya digunakan jika

suatu fungsi seperti energi potensial tidak dapat diterapkan. Secara umum hubungan gaya dan perpindahan dituliskan dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f1} \\ \mathbf{f2} \\ \mathbf{f3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{fni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K11} & \mathbf{K12} & \mathbf{K13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{K1n} \\ \mathbf{K21} & \mathbf{K22} & \mathbf{K23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{K2n} \\ \mathbf{K31} & \mathbf{K23} & \mathbf{K33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{K3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{Kni} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Knn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d1} \\ \mathbf{d2} \\ \mathbf{d3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{dn} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Untuk elemen segi tiga terdapat tiga node, dan tiap node memiliki dua perpindahan, U dan V



Gambar 2.2. Elemen Segi Tiga

Sehingga jumlah perpindahan adalah enam. Dan persamaan elemen dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ . \\ . \\ . \\ F6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 & . & . & . & . & K1n \\ K21 & K22 & K23 & . & . & . & . & K2n \\ K31 & K23 & K33 & . & . & . & . & K3n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ K61 & . & . & . & . & . & . & K66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ . \\ . \\ . \\ D6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.3)$$

Dimana matriks perpindahan (d) adalah

$$\begin{bmatrix} .d1 \\ .d2 \\ .d3 \\ .d4 \\ .d5 \\ .d6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ .u6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.4)$$

Penurunan persamaan elemen, secara umum dalam melakukan analisa metoda elemen hingga terdapat tiga tahap .

1. Mendefinisikan fungsi perpindahan, setelah memilih tipe elemen, apakah elemen truss,beam, segitiga atau solid, maka harus mendefinisikan fungsi perpindahan. Dengan menggunakan fungsi perpindahan, dapat dilakukan interpolasi perpindahan diantara node. Misalkan suatu fungsi perpindahan linear untuk elemen dua dimensi adalah

$$U = a_1 + a_2.x + a_1y, \dots \dots \dots (2.5)$$

$$V = a_4 + a_5 + a_6.y \dots \dots \dots (2.6)$$

Dimana variabel u dan v adalah perpindahan dalam arah x dan y.

2. Mendefinisikan hubungan (c-d) dan ($\epsilon - \sigma$), tahap kedua adalah mendefinisikan hubungan antara regangan dan perpindahan ($\epsilon = d$) dan hubungan antara tegangan dan regangan ($\sigma - \epsilon$) sebagai contoh untuk bidang tegangan dua dimensi, berlaku hubungan sebagai berikut :

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x, \dots \dots \dots (2.7)$$

$$\epsilon_x = \sigma_x / E = \nu \sigma_x / E, \dots \dots \dots (2.8)$$

$$\epsilon_y = \sigma_y / E = \nu \sigma_x / E, \dots \dots \dots (2.9)$$

Dimana ϵ_x dan ϵ_y adalah regangan aksial dalam arah x dan y, ν adalah regangan geser, ν adalah poisson, dan E adalah modulus elastisitas material.

3. Penurunan persamaan elemen, berdasarkan fungsi perpindahan dan definisi hubungan ($\epsilon - d$) dan ($\sigma - \epsilon$), persamaan elemen dapat diturunkan dengan menggunakan salah satu dari ketiga metoda .

A.2. Pengertian Tegangan

Hubungan tegangan-tegangan dalam teori elastisitas dikenal dalam bentuk :

$$[\alpha] = [D](\epsilon), \dots \dots \dots (2.10)$$

Dimana :

[α] = Vektor tegangan

[D] = Matriks tegangan -regangan atau Matriks kekakuan material

[ϵ] = Vektor regangan

Oleh karena pembahasan dibatasi hanya dalam lingkup dua dimensi, maka analisis tegangan dan regangan yang dilakukan terbatas pada suatu bidang datar XOY dan disebut elastisitas Bidang, yang dapat dikategorikan dalam dua macam kasus yaitu

- Tegangan Bidang (plane stress)
- Regangan Bidang (plane strain)

Dimana masing-masing kasus ini dibedakan oleh Matriks D atau matriks C

A.2.1 Tegangan Bidang

Bila suatu plat tipis dibebani gaya dalam arah sejajar dengan bidang plat, maka tegangan dan deformasi pada pelat tadi disebut tegangan bidang atau dapat didefinisikan sebagai suatu keadaan dimana tegangan normal dan tegangan geser tegak lurus bidang diabaikan yaitu :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

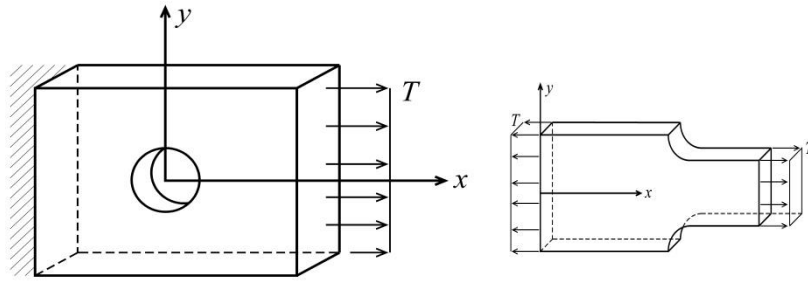
Jadi tegangan normal dan tegangan geser X dan Y dapat

dituliskan dalam bentuk vektor adalah sebagai berikut : (Ashad Hanafi, 2013)

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

Struktur yang tergolong dalam kasus tegangan bidang adalah struktur tiga dimensi yang mempunyai salah satu ukuran dimensi yang jauh lebih kecil bila dibandingkan dengan kedua ukuran dimensi lainnya dan menerima beban pada bidang dua dimensi tersebut.

Contoh pada gambar 2.3.a. dan 2.3.b., keduanya merupakan pelat pada bidang XOY yang menerima beban pada bagian sisinya. Akibat pembebanan tersebut tidak terjadi distribusi tegangan pada arah Z.



(a) Pelat Berlubang (b) Pelat Terpencung
Gambar 2.3. Contoh kasus tegangan bidang

Matriks D untuk kasus tegangan bidang adalah :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} , \dots\dots\dots (2.13)$$

Dimana :

E : Modulus Elastisitas

V : Ratio Poisson's

D : Displacement

Sehingga hubungan tegangan-regangan dari persamaan (2.1) menjadi

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} , \dots\dots\dots (2.14)$$

Sedangkan regangan arah normal arah Z adalah :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) , \dots\dots\dots (2.15)$$

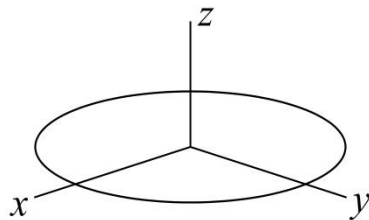
Pelat dasar tipis merupakan elemen tegangan bidang. Gaya luar yang bekerja adalah traction tegangan geser dan tegangan dalam bidang. Elemen tegangan bidang

merupakan elemen yang paling sederhana dalam sistem struktur kontinum, seperti pada struktur dinding geser (shear walls), konstruksi pelat dengan pengaku

gambar 2.4. memperlihatkan struktur dasar dari tegangan bidang , tegangan bidang didefinisikan

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$$

gambar 2.4. struktur dasar tegangan bidang



$$\epsilon'_{zx} = \epsilon'_{zy} = 0, \epsilon'_{zz} \neq 0, \dots\dots\dots(2.16)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\epsilon'_{yy} = 1/E (-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \dots\dots\dots (2.18)$$

$$\epsilon'_{xy} = 2(1+\nu)/E \cdot \sigma_{xy}, \dots\dots\dots (2.19)$$

Dalam matriks

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}, \dots\dots\dots(2.20)$$

invers persamaan (2.8)

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (2.21)$$

Atau

$$(\sigma) = (E)[\epsilon] , \dots\dots\dots(2.22)$$

Jadi

$$(\sigma) = (E) (D)(A) \dots\dots\dots(2.23)$$

A.2.2. Regangan Bidang

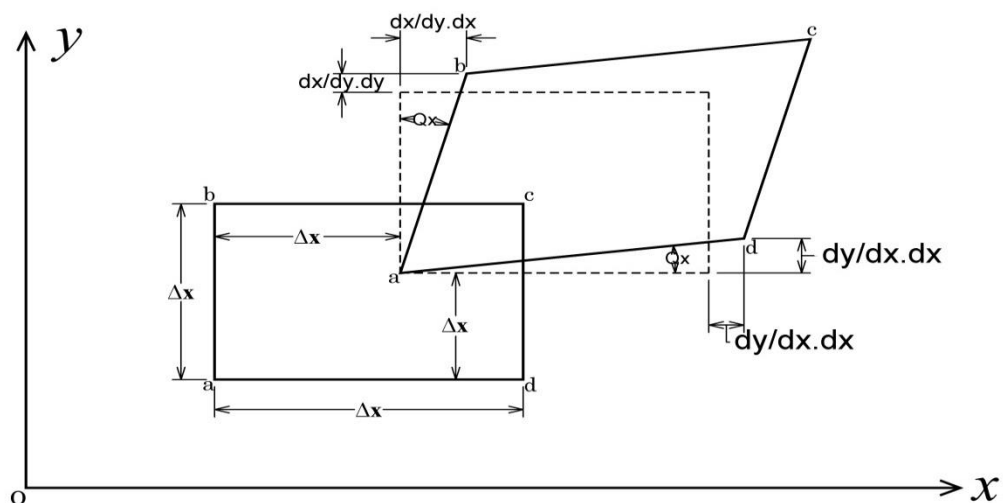
Regangan bidang didefenisikan sebagai suatu keadaan dimana regangan normal dan regangan tegak lurus bidang diabaikan :

$$\epsilon_x = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 , \dots\dots\dots(2.24)$$

jadi regangan normal dan regangan arah X dan arah Y dapat ditulis dalam bentuk vector sebagai berikut :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} , \dots\dots\dots(2.25)$$

Seperti dijelaskan pada gambar 2.2.a dibawah ini :



gambar 2.5 Deformasi elemen regangan

dimana :

$$\varepsilon_x = \frac{dUx}{dx} = \frac{d}{dx} , \dots\dots\dots (2.26)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dVy}{dy} = \frac{d}{dy} , \dots\dots\dots (2.27)$$

Regangan Normal

$$\varepsilon_z = \frac{dwz}{dz} = \frac{d}{dz} , \dots\dots\dots (2.28)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{dUy}{dx} + \frac{dUx}{dy} , \dots\dots\dots (2.29)$$

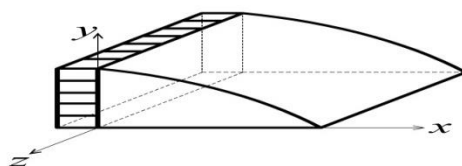
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{dVz}{dy} + \frac{dUx}{dy} , \dots\dots\dots (2.30)$$

Regangan Geser

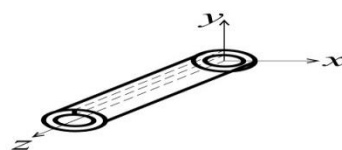
$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{dWx}{dz} + \frac{dWz}{dx} , \dots\dots\dots (2.31)$$

Struktur yang tergolong dalam kasus regangan bidang adalah struktur tiga dimensi yang mempunyai salah satu ukuran dimensi yang jauh lebih besar (memanjang) bila dibandingkan dengan kedua ukuran dimensi lainnya dan menerima beban tegak lurus sumbu dimensi memanjang tersebut.(Ashad Hanafi, 2013)

Struktur memanjang mempunyai penampang yang konstan sehingga analisis dilakukan untuk satu satuan panjang. Contoh pada gambar 2.5.a berupa struktur bendungan dan sedangkan pada gambar 2.5.b berupa pipa memanjang. Struktur pada kedua contoh menerima beban tegak lurus memanjang Z. Akibat pembebanan tersebut; tidak terjadi distribusi regangan pada arah



Gbr.2.6.a. Stuktur bendungan



Gbr.2.6.b. Pipa Memanjang

Matriks D untuk kasus regangan bidang adalah :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \dots\dots\dots(2.32)$$

Hubungan tegangan-regangan dari pers. (2.4) menjadi :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \dots\dots\dots(2.33)$$

Sedangkan tegangan normal arah Z adalah :

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y), \dots\dots\dots(2.34)$$

A.2.3. Hubungan Regangan - Perpindahan

Pada metode elemen hingga titik-titik elemen akan beralih tempat, sehingga terjadi suatu peralihan tempat atau displacements. Peralihan adalah suatu vektor dan karenanya secara umum mempunyai tiga komponen ialah : u, v, dan w. Ketiga besaran tersebut (besaran skalar) ini didekati dengan fungsi yang merupakan fungsi interpolasi antara peralihan titik-titik nodal yang dipilih pada tepi elemen. Ketika komponen peralihan itu dinyatakan dalam kolom Matriks sebagai berikut :

$$[V] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \dots\dots\dots(2.35)$$

Dimana :

u : Deformasi/peralihan dalam arah X

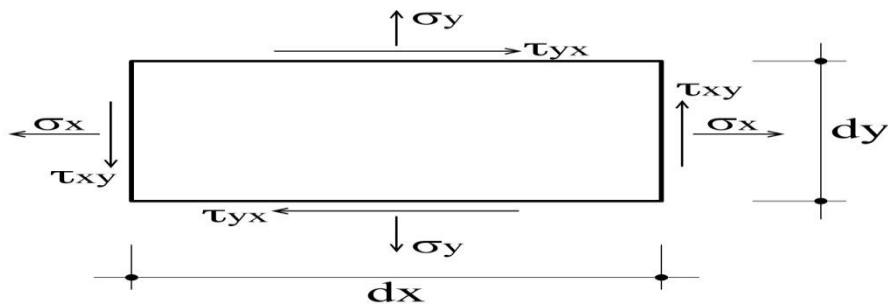
v : Deformasi/peralihan dalam arah Y

w : Deformasi/peralihan dalam arah Z

Dari ketiga komponen perpindahan ini selanjutnya dapat diturunkan menjadi besaran regangan normal dan regangan geser yang diakibatkan pembebanan sehingga menimbulkan suatu deformasi relative sumbu asalnya.(Ashad Hanafi,2013)

Hubungan regangan – perpindahan untuk kasus dua dimensi selengkapnya ditulis dalam bentuk matriks sebaagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (2.36)$$

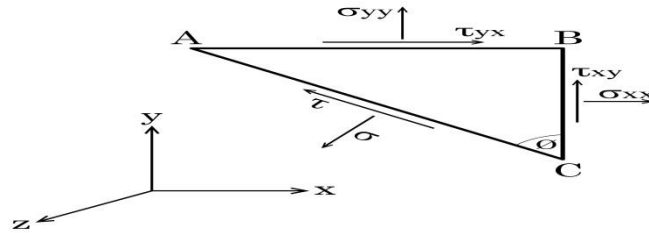


gambar 2.7. Tegangan 2 dimensi

A.2.4. Tegangan – tegangan Utama

Tegangan-tegangan utama yang terjadi pada suatu bidang merupakan tegangan maksimum dan minimum yang bekerja pada arah θ yaitu sudut yang dibentuk oleh arah tegangan maksimum dan sumbu X dihitung berlawanan jarum jam. Menentukan tegangan-tegangan utama pertama kali diperhatikan keadaan tegangan dua dimensi seperti dalam gambar 2.7.

Diperlihatkan sebuah elemen kecil dengan ukuran dx kali dy dan memiliki tegangan normal x dan y yang bekerja dalam arah x dan y. pada gambar juga diperlihatkan tegangan geser xy, yang bekerja pada sisi x dalam arah y, juga tegangan geser komplementer yx, yang bekerja pada sisi Y dan arah X. dari tiga type tegangan bebas tersebut dapat dibentuk sebuah vector



Gbr 2.8 penguraian. Gaya

Kemudian tinjau gambar 2.6.b yang dibentuk dengan memotong elemen persegi gambar 2.6.a yang tidak lurus bidang XY.

Cara yang jelas untuk melakukannya adalah dengan menguraikan tegangan yang beraksi pada bidang AC agar tetap elemen segitiga tersebut dalam keadaan keseimbangan Kemudian menguraikan gaya-gaya yang bekerja sepanjang AC dan tegak lurus AC dengan menguraikan gaya normal pada AC didapatkan :

$$\sigma \text{ X } AC = \sigma_{xx} \text{ X } BC \cos + \sigma_{yy} \text{ X } AB \sin + \tau_{xy} \text{ X } BC \sin + \tau_{xy} \text{ X } AB \cos \theta \quad (2.37)$$

Karena bidang gambar 2.8 dalam keseimbangan, maka tidak ada rotasi sehingga jumlah momen sama dengan 0, jadi :

$$\tau_{YX} = \tau_{XY} , \dots \dots \dots (2.38)$$

Dengan demikian :

$$\sigma = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta , \dots \dots \dots (2.39)$$

Atau :

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta , \dots \dots \dots (2.40)$$

Jika kita uraikan sepanjang AC akan didapatkan sebagai berikut :

$$= \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta , \dots \dots \dots (2.41)$$

Jika = 0 maka,

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \dots\dots\dots (2.42)$$

Sehingga :

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \dots\dots\dots (2.43)$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (2.24) dan menyamakan hasilnya dengan nol
maka :

$$-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + 2 \tau_{xy} \cos 2\theta, \dots\dots\dots (2.44)$$

Atau :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \dots\dots\dots (2.45)$$

Hasil ini juga diperoleh untuk kasus T=0 ini berarti tegangan utama juga merupakan tegangan langsung maksimum dan minimum yang dapat terjadi.

Jika pada gambar 2.8. kita menganggap bahwa σ merupakan tegangan utama, ini berarti tegangan geser sama dengan 0. Dengan menguraikan tegak lurus dan sepanjang arah BC maka,

$$\sigma \times AC \cos \theta = \sigma_{xx} BC + \tau_{xy} AB, \dots\dots\dots (2.46)$$

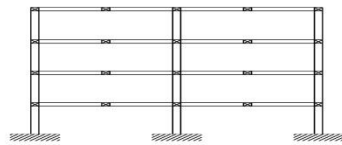
A. 3 .Macan-macam Elemen

Mendasari konsep dari pada metode elemen hingga yaitu proses diskritisasi yang membagi suatu komponen menjadi beberapa bagian yang lebih kecil, sehingga memperoleh suatu nilai pendekatan (bukan eksak) tegangan dan peralihan yang terjadi pada suatu struktur maka berbagai elemen dapat dipakai dan dipilih berdasarkan jenis

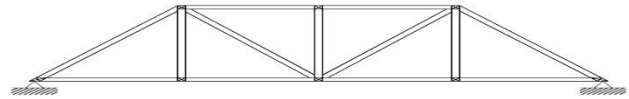
struktur dan keperluannya. Secara garis besar elemen-elemen dibagi menjadi:
(Alisjahbana. W. Sofia, 2016)

A.3.1. Elemen Satu Dimensi

Elemen - elemen aksial, lentur dan torsi dengan sunbu .yang lurus sering kita jumpai pada struktur portal rangka (Gbr 2.8.a. dan Gbr 2.8.b.) terutama pada batang-batang pembentuk rangka tadi, dimana batang-batang pembentuk atau tiga jenis



Gbr 2.9a struktur Portal



Gbr 2.9b.Struktur Rangka

deformasi.namun hal tersebut bergantung pada type rangka yang akan dianalisa.

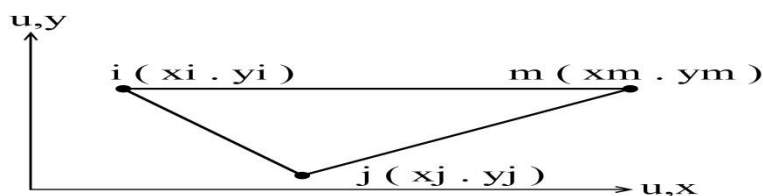
Elemen satu dimensi ini dapat dibagi dua yaitu :

a. Elemen Batang

Dipakai bila peralihan terjadi hanya menurut pada suatu koordinasi saja.

b. Elemen Balok

Bila elemen berbentuk balok dengan tiga transisi dan tiga rotasi pada titik modalnya.



Gambar 2.10.Elemen Tiga Dimensi

A.3.2. Elemen Dua Dimensi

Menurut bidang pembebanannya, elemen dua dimensi dibagi menjadi dua bagian, yaitu

1. Elemen Batang

Bila beban terletak pada elemen sehingga peralihan terjadi pada bidangnya.

Pada elemen bidang ini akan timbul tegangan serta regangan bidang.

2. Elemen Plat

Bila beban tegak lurus bidang elemen, sehingga terjadi peralihan pada bidangnya. Sehingga menimbulkan tegangan-tegangan pada elemen Plat tersebut.

Bentuk paling sederhana dari elemen dua dimensi ini adalah elemen segi tiga dan elemen segi empat, dimana untuk elemen segi tiga mempunyai tiga titik nodal dan elemen segi empat dengan empat titik nodal. juga jika diinginkan ketelitian yang lebih tinggi maka jumlah titik nodal dapat ditingkatkan sesuai dengan keinginan kita menurut pertimbangan kita dalam mendekati nilai seharusnya.

A.3.3. Elemen Selaput

Elemen selaput ini mempunyai sebuah arah ukuran yang jauh lebih kecil dibanding dengan dua arah lainnya. baik untuk beban pada bidangnya maupun beban tegak lurus bidangnya. Dan juga elemen selaput ini dapat juga rata atau tidak rata seperti pada elemen bidang ataupun elemen plat.

3.d. elemen Tiga Dimensi / Simetris-Aksial

Elemen tiga dimensi merupakan pengembangan dari elemen dua dimensi. Dimana elemen tiga dimensi ini berkembang pada benda pejal eksisimetris yang didefinisikan sebagai benda tiga dimensi yang diperoleh dengan cara memutar sesuatu atau sebuah bidang terhadap sebuah sumbu.

B. Penulisan Terdahulu

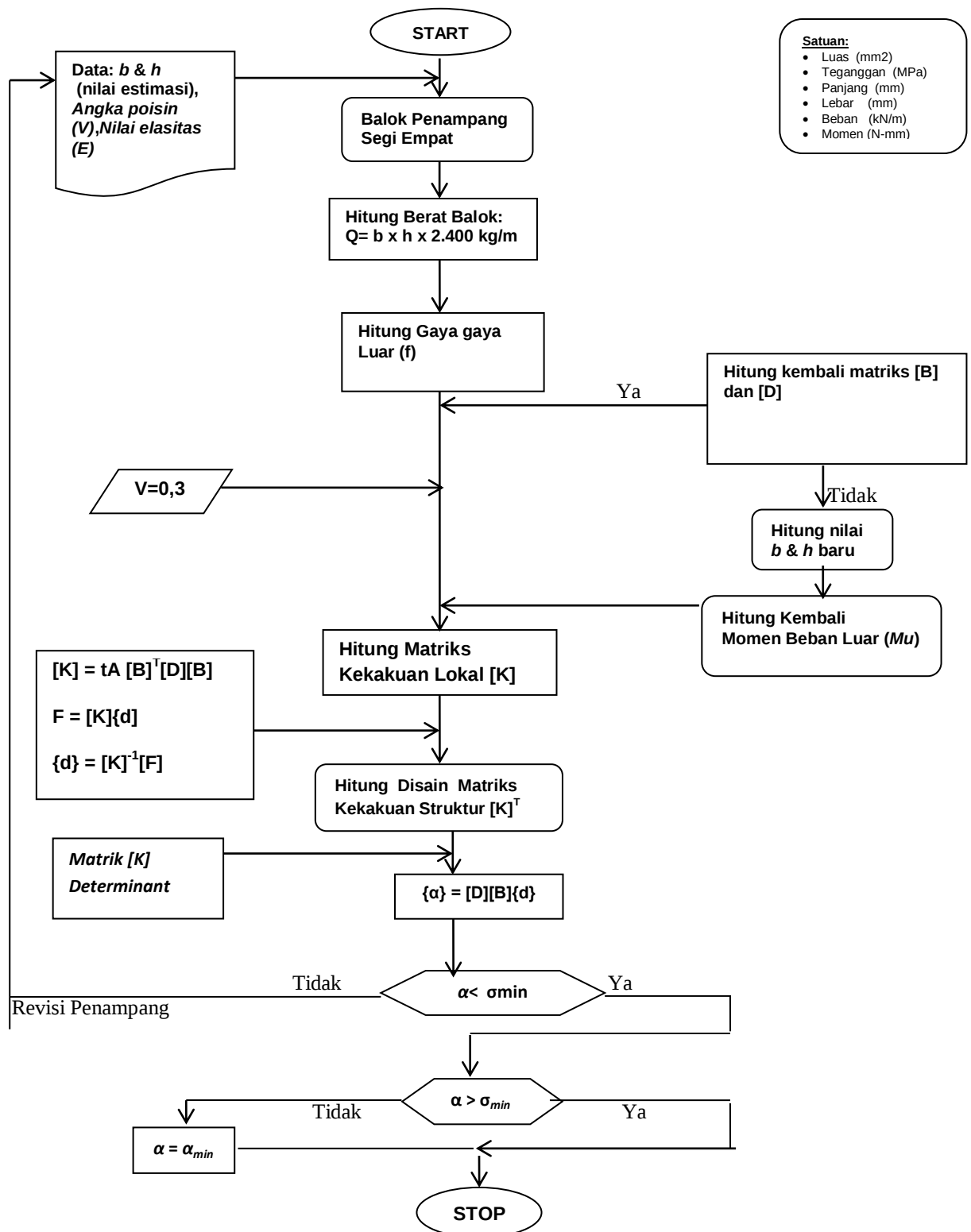
Beberapa hasil penulisan sebelumnya terkait dengan analisis tegangan dengan methoda Elemen hingga, melalui jurnal Nasional dan Internasional telah dilakukn oleh beberapa penulis sehingga beberapa point penting yang dapat dijadikan dasar dalam penulisan ini,sebagai berikut Matriks

Tabel 2.1. Penelitian terdahulu

NO	NAMA PENULIS	JUDUL PENULISAN	METODA PENULISAN	JENIS PENULISAN	HASIL
1	Servi. O. Baps (2011)	Aplikasi Metoda Elemen Hingga pada Struktur rangka batang	Deformasi dan tegangan	Analisa Struktur Rangka Baja	Beban Aksi Permukaan
2	Frida Aulya (2015)	Analisa Plastis pada Portal dengan Metoda Elemen Hingga	Metoda Guassian Quadrature	menggunakan satu titik samping sebagai analisa plastis	hasil ini menyimpulkan bahwa besarnya tegangan dimasing – masing elemen akan mendekati tegangan perkiraan
3	Andy. K. Effendi (2017)	Analisa Model dan Sifat Struktur dengan model Elemen Hingga (studi kasus :Pembangunan Hotel Haris Bandung)	acuan Fungsi perpindahan berupa polinomial untuk sebuah elemen baru	hasil analisa data untuk kondisi existing balok memenuhi persamaan diferensial dasar	balok memenuhi persamaan diferensial dasar untuk sebuah balok dan memenuhi syarat kontinuitas antar nodal dari satu elemen ke

4	TM. Arief (2016)	<i>Analisa Kekuatan Struktur Dengan Metoda Elemen Hingga</i> (studi kasus pembangunan gedung work shop PT. Baja Prima Inti Surabaya)	sistem Diskrit dengan menggabungkan persamaan aproksimasi atau interpolasi yang dikenal dengan pendekatan direk	sistem persamaan linear dengan elemen torsi	elemen lainnya sistem persamaan linear dengan elemen torsi akan mengalami perputaran node sebesar nilai-nilai konstanta
5	Santosa Mulyadi (2011)	“ Analisa tegangan pada portal berlantai dengan Metoda Elemen Hingga (studi kasus Pembangunan Gedung Kuliah Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Negeri Manado	integrasi garis dan integrasi ganda dengan memecahkan masalah dalam dua dimensi dalam hal ini masalah lentur pada pelat	dua dimensi yang memerlukan pemahaman matematika	Masalah dua dimensi yang memerlukan pemahaman matematika yang cukup dalam dengan sebuah fungsi integrasi yang berada dalam batas-batas standar

C. Kerangka Pikir Metoda Elemen Hingga



Gambar 2.11. Bagan Alir Perhitungan Tegangan Penampang Balok Beton

BAB III

METODE PENULISAN

A. Pendekatan dan Jenis Penulisan

A.1 Diskritisasi Suatu Struktur

Pada proses ini diperlukan suatu keputusan yang secara teknis dapat dipertanggung jawabkan. Elemen suatu struktur ditentukan oleh :

- a. Bentuk-bentuk elemen.

Bentuk Elemen terdiri atas beberapa bentuk misalnya dapat berupa segi tiga, segi empat, kubus dan lain-lain (Gbr.3.1)



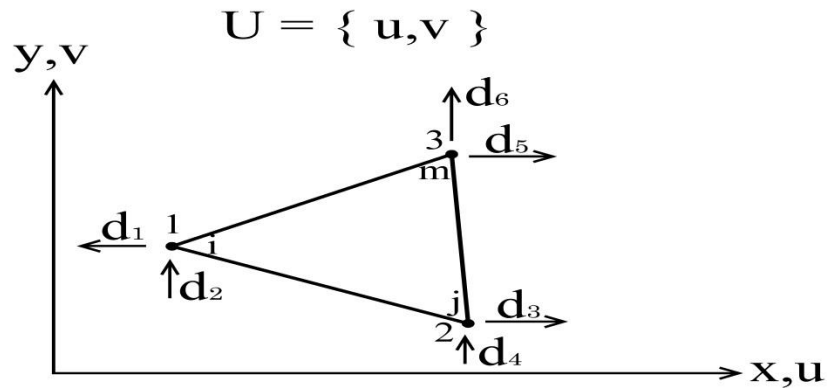
Gbr 3.1. bentuk – bentuk elemen

- b. Jumlah Simpul Elemen.

Jumlah titik Simpul elemen tergantung pada tingkat ketelitian yang diperlukan.

- c. Model Perpindahan.

Model perpindahan yang akan dibahas adalah bentuk elemen Segitiga sehingga fungsi perpindahan/peralihan untuk model yang diasumsikan pada elemen ini dinyatakan dalam bentuk polinomial seperti :



Gambar 3.2. Perpindahan Titik

$$U = a_1 + a_2 x + a_3 y , \dots \dots \dots (3.1)$$

$$V = a_4 + a_5 x + a_6 y , \dots \dots \dots (3.2)$$

Dengan penentuan yang dijelaskan pada Gbr, 3.2.diatas tersebut dapatlah kita mensimulasikan struktur aslinya dengan setepat-setepatnya, walaupun demikian harus pula diperhatikan batas kemampuan computer,pada saat sturuktur dibagi-bagi menjadi elemen-elemen sekecil kecilnya sehingga mendekati solusi yang tepat sehingga cara yang paling mudah adalah membagi struktur-sturuktur menjadi elemen elemen ysng sama semua. Namun demikian tidak setiap struktur dapat diperlakukan demikian. Misalnya pada belokan akan terjadi perobahan tegangan, karena itulah sebaiknya dibelokan tersebut elemen-elemen diperhalus.

A.2. Asumsi – Asumsi Dasar.

Untuk lebih menyederhanakan permasalahan dalam analisa struktur dengan metode elemen hingga selalu ditetapkan beberapa aaumsi.

Khusus untuk persoalan yang kami bahas dalam tugas akhir ini asumsi-asuinsi yang diambil adalah :

1. Perilaku material adalah elastis, homogen dan isotropic.
2. Analisis dilakukan untuk satu struktur. (plane strain problem).
3. Berlaku hukum Hooke yaitu hubungan komponen tegangan dan komponen

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \dots \dots \dots (3.3)$$

Dimana :

E = Modulus elastisitas gaya tarik

(modulus of elasticity in tension) ...

4. Deformasi yang terjadi kecil
(Small Deformation).

B. Sistem Penomoran Titik nodal Elemen.

Setelah struktur dibagi-bagi menjadi beberapa elemen sesuai dengan tingkat ketelitian yang diinginkan maka titik-titik perpotongan antara sisi-sisi elemen atau disebut juga titik nodal diberi nomor.

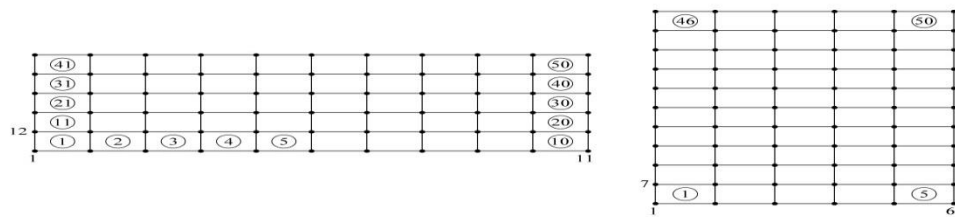
Pada gambar 3.3. diperlihatkan dua macam sistem penomoran titik nodal.

Kita misalkan pada arah sumbu X terdapat 10 elemen dan pada arah Y terdapat 5 elemen Nomor yang dilingkari menunjukkan nomor elemen dan nomor yang tidak dilingkari menunjukkan nomor titik nodal.

Pada Gbr. 3.3. a. penomoran dilakukan pada arah memanjang/panjang struktur dan pada Gbr.3.3.b penomoran dilakukan pada arah melintang/pendek struktur terlihat bahwa selisih terbesar antara dua nomor titik nodal yang berdekatan berbeda untuk kedua tersebut.

Gambar 3.3 (a), 3.3(b) Penomoran ke arah panjang dan lebar

Gambar 3.3 (a), 3.3(b) Penomoran ke arah panjang dan lebar



Gambar 3.3 (a), 3.3(b) Penomoran ke arah panjang dan lebar

pada sistem penomoran ke arah panjang struktur (gbr 3.3.a) selisih tersebut adalah 11 sedangkan pada sistem penomoran ke arah pendek struktur (gbr 3.3.b) selisih tersebut adalah 6, atau lebih kecil dari sistem yang pertama, dengan demikian pada gbr. 3.3.b adalah yang lebih baik pengertian ini penting karena ada hubungannya dengan jumlah memori yang akan dipakai pada komputer.

C. Langkah – Langkah Perhitungan.

Prosedure perhitungan dengan metode elemen hingga dilaksanakan dalam 8 (delapan) langkah dasar yaitu :

Langkah – 1 : Diskritisasi dan memilih type elemen. Yaitu membagi kontinum menjadi sejumlah elemen yang berhingga dengan bentuk geometri yang sederhana (Segi tiga, Segi empat dsbnya). Pertemuan antara elemen-elemen disebut garis nodal (nodal lines) atau bidang nodal (nodal planes). Sedangkan titik potong antara sisi-sisi elemen disebut titik nodal.

Langkah – 2 : Memilih model atau fungsi perpindahan. Yaitu memilih sebuah pola atau bentuk fungsi untuk distribusi perpindahan setiap titik sembarang yang berlaku pada setiap elemen, dimana dipengaruhi oleh nilai titik nodalnya.

Langkah -3 :Menentukan hubungan regangan-peralihan dan hubungan tegangan-
tegangan. Pada setiap elemen harus dipenuhi persyaratan hubungan regangan-
peralihan dan hubungan tegangan-regangan sesuai dengan kasusnya.

Langkah - 4: Menentukan persamaan elemen dan matriks kekakuan elemen. Salah satu
cara yang sering digunakan untuk menurunkan persamaan elemen yaitu dengan prinsip
usaha virtuil,yang akan menghasilkan bentuk persamaan

$$\{ f \} = [K] \{ d \}, \dots\dots\dots (3.4)$$

Di mana :

$\{ f \}$ = Vektor gaya titik nodal.

$[K]$ = Matriks kekakuan elemen.

$\{ d \}$ = Vektor peralihan titik nodal

Langkah – 5: Menentukan persamaan global dan masukan syarat-syarat batas.
Persamaan elemen yang diperoleh dari langkah - 4 diadakan penggabungan dan dengan
memasukkan syarat-syarat batas maka dapat persamaan global dalam bentuk :

$$\{ f \} = [K] \{ d \} , \dots\dots\dots (3.5)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^n (k^e), \dots\dots\dots (3.6)$$

Di mana :

$\{ F \}$ = Vektor penggabungan gaya titik nodal global.

$[K]$ = Matriks kekakuan Struktur

$\{ d \}$ = Vektor Peralihan titik nodal global.

Langkah –6 :S e l e s a i k a n persamaan Global.Persamaan (3.5) merupakan suatu
sistim persamaan linier dimana hasil yang diperoleh adalah merupakan peralihan titik
nodal sebagai besaran pertama.. (Primary Unknown).

Langkah – 7 :selesaikan besaran global.

Pada langkah ini umumnya dilakukan perhitungan Regangan dan tegangan yang diperoleh dari persamaan langkah-3 serta reaksi-reaksi perletakan bila diperlukan.

Langkah – 8 :Interprestasi hasil.

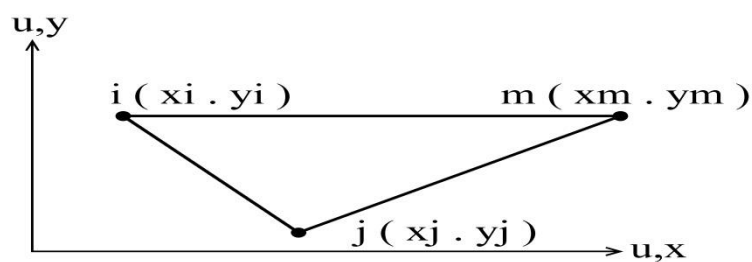
Hasil perhitungan berupa output dari komputer yang segera dapat dipergunakan untuk anaiisis desain selanjutnya.Interprestasi hasil yang dilakukan antara lain :

Menggambarkan besaran peralihan dan tegangan yang terjadi dalain sistim.

D.Formulasi Elemen Dua Dimensi

.D.1. Geometri.

Elemen hingga yang berbentuk Segitiga yang dilukiskan pada gbr 3.4 dibawah ini terletak pada suatu sistim sumbu kartesian X dan Y. Elemen ini dapat dikatakan merupakan elemen yang sederhana untuk digunakan dalam menganalisa tegangan dan dimensi. Elemen Segi tiga tesebut dapat dikatakan juga elemen Segi tiga regangan Constan(Constant Strain Triangle, CST). Hal ini disebabkan karena konstanta-konstanta yang terjadi berkaitan langsung dengan koordinat titik simpul.



Gambar 3.4. Koordinat Alami Elemen dua Dimensi

Koordinat ketiga titik nodal adalah i,j dan m) dimana setiap titik nodal memiliki peralihan umum (translasi) dalam bidang X – Y sbb :

$$Y = (U , V) , \dots\dots\dots (3.7)$$

Dalam bentuk matriks perpindahan titik nodal elemen adalah :

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} di \\ dj \\ dm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Ui \\ Vi \\ Uj \\ Vj \\ Um \\ Vm \end{Bmatrix} , \dots\dots\dots (3.8)$$

Dengan demikian asumsi fungsi peralihan elemen segi tiga tersebut adalah :

$$U(X, Y) = a_1 + a_2 + a_3 y , \dots\dots\dots (3.9)$$

$$U(X, Y) = a_4 + a_5 + a_6 y , \dots\dots\dots (3.10)$$

Yang linear baik arah X maupun arah Y. dari fungsi-fungsi tersebut dapatlah dibentuk suatu matriks sbb :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} , \dots\dots\dots (3.11)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & X & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} , \dots\dots\dots (3.12)$$

Dari persamaan (3.12) kita dapat mensubstitusikan koordinat titik nodal dalam persamaan sbb :

$$\begin{Bmatrix} Ui \\ Uj \\ Um \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 X_i + a_3 y_i \\ a_1 + a_2 X_j + a_3 y_j \\ a_1 + a_2 X_m + a_3 y_m \end{Bmatrix} , \dots\dots\dots (3.13)$$

Dan

$$\begin{cases} Vi \\ Vj \\ Vm \end{cases} = \begin{cases} a_4 + a_5 X_i + a_6 Y_i \\ a_4 + a_5 X_j + a_6 Y_j \\ a_4 + a_5 X_m + a_6 Y_m \end{cases}, \dots \dots \dots (3.14)$$

Dimana :

$$\begin{aligned} U_i &= (X_i, Y_i) \\ U_j &= (X_j, Y_j) \\ U_m &= (X_m, Y_m) \end{aligned}$$

Kemudian persamaan (3.14) diatas dapat dibuat dalam bentuk Matriks sbb :

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_m & Y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \dots \dots \dots (3.15)$$

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_m & Y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}, \dots \dots \dots (3.16)$$

Dengan cara menginverkan konstanta (a) yang merupakan konstanta perpindahan titik simpul yaitu :

$$\begin{aligned} [a] &= [X^{-1}]\{U\} \\ [a] &= [X^{-1}]\{V\} \end{aligned}$$

Dimana Matriks (X) merupakan Matriks 3 x 3 dari persamaan (3.15) dan (3.16)

Kemudian dengan metode kofaktor maka invers matriks (X) di dapatkan :

$$\begin{aligned} [X^{-1}] &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \sigma_i & \sigma_j & \sigma_m \end{bmatrix} \\ 2A \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_m & Y_m \end{bmatrix} &, \dots \dots \dots (3.17) \end{aligned}$$

Nilai Determinan dari persamaan. (3.16) adalah sbb : $2A = X_i(Y_j - Y_m) + X_j(Y_m - Y_i) + X_m(Y_i - Y_j)$

Dari persamaan (3.17) diatas dapat diketahui koefisien kofisien matriks (α, β, σ) yang dapat ditulis dengan melihat persamaan (3.17) yang menghasilkan koefisien-koefisien tersebut dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= X_j X_m - Y_j X_m & \alpha_j &= Y_i X_m - X_i Y_m & \alpha_m &= X_i Y_i - X_i Y_j \\ \beta_i &= Y_j - Y_m & \beta_j &= Y_m - Y_i & \beta_m &= Y_i - Y_j \end{aligned}$$

$$\sigma i = Ym - Xj \qquad \sigma j = Xi - Xm \qquad \sigma m = Xj - Xi$$

Dengan demikian persamaan (3.8) dapat dituliskan dalam bentuk matriks dengan melihat persamaan (3.8) sbb :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha i & \alpha j & \alpha m \\ \beta i & \beta j & \beta m \\ \sigma i & \sigma j & \sigma m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}, \dots\dots\dots (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha i & \alpha j & \alpha m \\ \beta i & \beta j & \beta m \\ \sigma i & \sigma j & \sigma m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_m \end{Bmatrix}, \dots\dots\dots (3.19)$$

.D.2.Perpindahan

Dari persamaan (3.15) diatas kita akan menghitung fungsi perpindahan U (X,Y) secara umum, yang berhubungan langsung dengan Variabel X dan Y. secara umum kita dapatkan :

$$\{U\} = \{1 \ x \ Y\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 3 \end{Bmatrix}, \dots\dots\dots (3.20)$$

Kemudian dimasukkan ke dalam persamaan (3.16) akan menghasilkan :

$$\{U\} = \frac{1}{2A} [1 \ x \ Y] \begin{bmatrix} \alpha i & \alpha j & \alpha m \\ \beta i & \beta j & \beta m \\ \sigma i & \sigma j & \sigma m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}, \dots\dots\dots (3.21)$$

Dengan mengalihkan persamaan (3.21) :

$$\{U\} = \frac{1}{2A} [1 \ x \ Y] \begin{bmatrix} \alpha i u_i & \alpha j u_j & \alpha m u_m \\ \beta i u_i & \beta j u_j & \beta m u_m \\ \sigma i u_i & \sigma j u_j & \sigma m u_m \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (3.22)$$

Kalikan kembali kedua matriks tersebut (pers. 22) dan disusun kembali menghasilkan

$$:U(X,Y) = \frac{1}{2A} (\alpha i + \beta i x + \sigma i y) u_i + (\alpha j + \beta j x + \sigma j y) u_j + (\alpha m + \beta m x + \sigma m y) u_m, \dots\dots\dots (3.23)$$

Demikian pula dengan V analog dengan penyelesaian tersebut di atas (pers. 3.23) menghasilkan sebagai berikut :

$$V(x, y) = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_{ix} + \sigma_{iy}) v_i + (\alpha_j + \beta_{jx} + \sigma_{jy}) v_j + (\alpha_m + \beta_{mx} + \sigma_{my}) v_m \quad (3.24)$$

Dalam bentuk sederhana pers. (3.23 dan 3.24) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$U(X, Y) = N_i U_i + N_j U_j + N_m U_m, \dots \dots \dots (3.25)$$

$$U(X, Y) = N_i V_i + N_j V_j + N_m V_m, \dots \dots \dots (3.26)$$

Dengan ketentuan bahwa :

$$N_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_{ix} + \sigma_{iy}), \dots \dots \dots (3.26)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (\alpha_j + \beta_{jx} + \sigma_{jy}), \dots \dots \dots (3.27)$$

$$N_m = \frac{1}{2A} (\alpha_m + \beta_{mx} + \sigma_{my}), \dots \dots \dots (3.28)$$

Sehingga dalam bentuk matriks kita dapat menuliskan sebagai berikut:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U(X, Y) \\ V(X, Y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i U_i & N_j U_j & N_m U_m \\ N_i V_i & N_j V_j & N_m V_m \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (3.29)$$

Atau :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}, \dots \dots \dots (3.30)$$

Persamaan (3.28) dapat diringkas sebagai berikut :

$$\{U\} = [N]\{d\}, \dots \dots \dots (3.31)$$

Dimana :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.32)$$

$[N]$ = Matriks fungsi Bentuk

D.3. Regangan Elemen

Regangan pada elemen dua dimensi telah dirumuskan bahwa:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.33)$$

Dengan menggunakan persamaan : (3.25), untuk perpindahan titik kita dapatkan :

$$\frac{du}{dx} = U_{i,x} = \frac{d}{dx} (N_i U_i + N_j U_j + N_m U_m) \dots\dots\dots (3.34)$$

Atau :

$$U_{i,x} = N_{i,x} U_i + N_j U_j + N_m U_m \dots\dots\dots (3.35)$$

Kita dapat menggunakan $U_{i,x} = 0$, hal ini disebabkan $U_{i,x}$ adalah merupakan nilai bebas atau titak tetap. Demikian pula $U_{j,X} = 0$ dan $U_{m,X} = 0$

Dengan persamaan (3.22) kita dapat menurunkan persamaan (3.35) diatas tersebut :

$$N_{i,x} = \frac{1}{2A} \frac{d}{dx} (\alpha_i + \beta_i x + \sigma_i y) = \frac{\beta_i}{2A} \dots\dots\dots (3.36)$$

Begitu pula :

$$N_{j,x} = \frac{\beta_j}{2A} \text{ dan } N_{m,x} = \frac{\beta_m}{2A} \dots\dots\dots (3.37)$$

Dengan persamaan (3.34), persamaan (3.33) kita dapatkan :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2A} (BiUi + BjUj + BmUm) ,..... (3.38)$$

Demikian pula kita dapatkan untuk :

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2A} (\sigma iVi + \sigma jUj + \sigma mUm) ,..... (3.39)$$

Selanjutnya :

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} (\sigma iUi + BiVi + \sigma jUj + BjVj + \sigma mUm + BmVm) , (3.40)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.38) dan (3.39) dalam persamaan (3.35) kita peroleh dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Bi & 0 & Bj & 0 & Bm & 0 \\ 0 & \sigma i & 0 & \sigma j & 0 & \sigma m \\ \sigma i & Bi & \sigma j & Bj & \sigma m & Bm \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ui \\ Vi \\ Uj \\ Vj \\ Um \\ Vm \end{Bmatrix} ,..... (3.41)$$

Atau :

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{2A} [Bi \ Bj \ Bm] \begin{Bmatrix} di \\ dj \\ dm \end{Bmatrix} ,..... (3.42)$$

Dimana :

$$(Bi) = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \beta i & 0 \\ 0 & \sigma i \\ \sigma i & \beta i \end{Bmatrix} [Bm] = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \beta m & 0 \\ 0 & \sigma m \\ \sigma m & \beta m \end{Bmatrix} ,..... (3.43)$$

$$(Bi) = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} \beta j & 0 \\ 0 & \sigma j \\ \sigma j & \beta j \end{Bmatrix} ,..... (3.44)$$

Kemudian disederhanakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\{\epsilon\} = [\beta]\{d\} ,.....(3.45)$$

Dimana :

$$[\beta] = [B_i \ B_j \ B_m] ,.....(3.46)$$

Jelaslah bahwa matriks (B) tergantung pada koordinat titik nodal elemen.

Seperti tampak pada persamaan (3.17) dan (3.39).

D. 4. Tegangan Elemen

Secara umum hubungan tegangan dan regangan dirumuskan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} ,.....(3.47)$$

Dimana : (D) = Matriks kekakuan Material atau Matriks Tegangan Regangan Dengan memasukkan (pers. 3.45) kedalam persamaan (3.47), maka tegangan bidang elemen dua dimensi dapt dirumuskan sebagai berikut :

$$\{\alpha\} = [D]\{\epsilon\}$$

$$\{\alpha\} = [D][B]\{d\} ,..... (3.48)$$

Dimana :

(α) : Tegangan

(D) : Matriks Kekakuan material

(B) : Matriks Regangan- Perpindahan

(d) : Matriks Perpindahan titik nodal elemen

E. Matriks Kekakuan

Untuk menurunkan matriks kelakuan elemen akan digunakan prinsip usaha Virtual yaitu bila pada suatu struktur dalam keadaan seimbang, dikerjakan suatu peralihan virtual yang kecil (Small deformation) dalam batas-batas deformasi yang masih dapat diterima maka usaha virtual dari beban luar tadi sama dengan energy regangan virtual dari tegangan dalam

Misalkan peralihan Virtual yang diberikan adalah yang ditimbulkan oleh tegangan dalam elemen sama dengan usaha Virtual yang ditimbulkan oleh beban luar yaitu :

$$\delta U_e, \dots\dots\dots (3.49)$$

Dari persamaan (3.34) di dapat fungsi perpindahan Virtual :

$$\{\delta f\} = \frac{\partial u}{\partial v} = [N][d], \dots\dots\dots (3.50)$$

Dari persamaan (3.40) didapat regangan Virtual

$$\{\delta \epsilon\} = [B]\{\delta d\}, \dots\dots\dots (3.51)$$

Energy regangan Virtual adalah :

$$\delta U_e = \int_v \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dv, \dots\dots\dots (3.52)$$

Dari persamaan-persamaan (2.1) (3.16) dan (3.52) di dapat :

$$\delta U_e = \int_v \{d\}^T \{B\}^T (D) T (B) (d) dv, \dots\dots\dots (3.53)$$

Sedangkan usaha virtual beban luar akibat beban luar misalkan berupa gaya titik nodal (P) dan gaya (b) adalah :

$$\delta W_e = \{\delta d\}^T \{P\} + \int_v \{\delta f\}^T \{b\} dv, \dots\dots\dots (3.54)$$

Substitusikan persamaan (3.50) ke persamaan (3.54) di dapat :

$$\phi w_e = \{\phi d\}^T \{P\} + \int_V \{\phi d\}^T \{N\}^T \{b\}, \dots \dots \dots (3.55)$$

Dari persamaan-persamaan (3.48), (3.52), (3.55) dan dengan mengeluarkan factor $\{d\}^T$ dari integrasi diperoleh :

$$\int_V [B]^T [D] [B] dv = \{P\} + \int_V [N]^T \{b\} dv, \dots \dots \dots (3.56)$$

Dengan demikian kita dapat mengambil nilai kekakuan elemen (k) adalah :

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv, \dots \dots \dots (3.57)$$

Dan

$$[Pb] = \int_V [N]^T [b] dv, \dots \dots \dots (3.58)$$

Maka persamaan (3.58) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[K][d] = \{P\} + \{P_b\}, \dots \dots \dots (3.59)$$

Dalam kasus elemen mempunyai ketebalan konstan, maka persamaan (3.42) menjadi :

$$[K] = t \int_A [B]^T [D] [B] dxdy, \dots \dots \dots (3.60)$$

Atau :

$$[K] = tA [B]^T [D] [B]. \dots \dots \dots (3.61)$$

Dan

$$[P_b] = t \int_A [N]^T \{b\} dxdy, \dots \dots \dots (3.62)$$

Atau

$$[P_b] = tA [N]^T \{b\}, \dots \dots \dots (3.63)$$

F. Solusi Persamaan

Dengan memasukkan syarat-syarat batas, maka untuk keseluruhan struktur didapat persamaan :

$$[K]\{d\} = \{F\} ,..... (3.64)$$

Dimana :

$[K]$: Matriks kekakuan struktur global

$\{d\}$: Vektor Peralihan titik nodal

$\{F\}$: Vektor penggabungan gaya titik nodal global

Dari persamaan (3.64) di dapat matriks

$$[K] = \sum_{e=1}^n (k_e)$$

$[K]$: Kekakuan elemen Lokal

Dari Solusi persamaan-persamaan yang telah diturunkan di atas menghasilkan seluruh peralihan titik nodal dan selanjutnya dapat dihitung tegangan dan rengangan untuk selanjutnya akan digunakan pada perhitungan-perhitungan selanjutnya.

Ditinjau dari jenis datanya pendekatan penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif. Menurut Moleong (2007), penelitian kualitatif merupakan penelitian yang bertujuan untuk memahami fenomena mengenai apa yang dialami oleh subjek penelitian secara holistic, dan dengan cara deskripsi dalam bentuk kata kata dan bahasa pada suatu konteks khusus yang alamiah dengan menggunakan berbagai metoda ilmiah. Adapun jenis pendekatan analisis ini adalah secara deskriptif. Penelitian deskriptif merupakan penelitian yang berusaha guna menuturkan pemecahan masalah yang ada sekarang .

Berdasarkan pada permasalahan yang diteliti, maka dalam analisis ini dari aspek samplingnya masuk kategori analisis numerik. Sejalan dengan itu maka Sugiono (2006) mengatakan bahwa analisis numerik pada umumnya dilakukan untuk mengambil suatu analisa dan pengamatan yang mendalam, namun generalisasi yang dilakukan bisa lebih akurat bila digunakan sampel yang representatif. Sedangkan dari sifatnya, rancangan analisa ini bersifat deskriptif dan korelasional.

Analisa deskriptif adalah suatu analisa yang berusaha memperoleh nilai berkenaan dengan fenomena yang dianalisa saat ini (Suhartono, 1987). Dalam analisa ini berusaha mendikripsikan data tentang objek atau variabel analisa yang ada pada analisa penampang balok beton.

G . Pengelolaan Peran sebagai Penulis

Peran peneliti dalam analisa kualitatif ini adalah sebagai perencana , pengumpul data, penganalisis, hingga akhirnya sebagai pencetus penelitian . pada penelitian kuantitatif menekankan bahwa peneliti sendiri atau dengan bantuan orang lain yang merupakan alat analisa data utama (Moeleong, 1980) oleh sebab itu peneliti merupakan hal kunci untuk melakukan analisa. Peneliti tidak saja berperan sebagai pengambil dan penganalisa data, dan penemu data hasil penelitian, akan tetapi peneliti juga akan menjadi rekan untuk subjek. Sehingga hasilnya akan lebih akurat dan valid karena semakin subjek percaya dengan analisa tersebut, maka akan memudahkan mereka untuk jujur dalam meminimalisir masalah yang timbul. Sebagai penganalis, maka pelaksanaan kegiatan menganalisa, dapat dikemukakan sebagai berikut:

1. Data Struktur (identifikasi masalah, parameter Shape, Koordinat titik Nodal, dan data – data elemen)
2. Data beban (Parameter Beban dan beban titik nodal)

3. Penurunan matriks K dan matrik Fungsi
4. Proses Kekakuan langsung (K) , distribusi beban F pada bidang untuk mendapatkan kekakuan global (k) dan (F)
5. Factorisasi matrik (K)
6. Tegangan

H . METODE PENULISAN

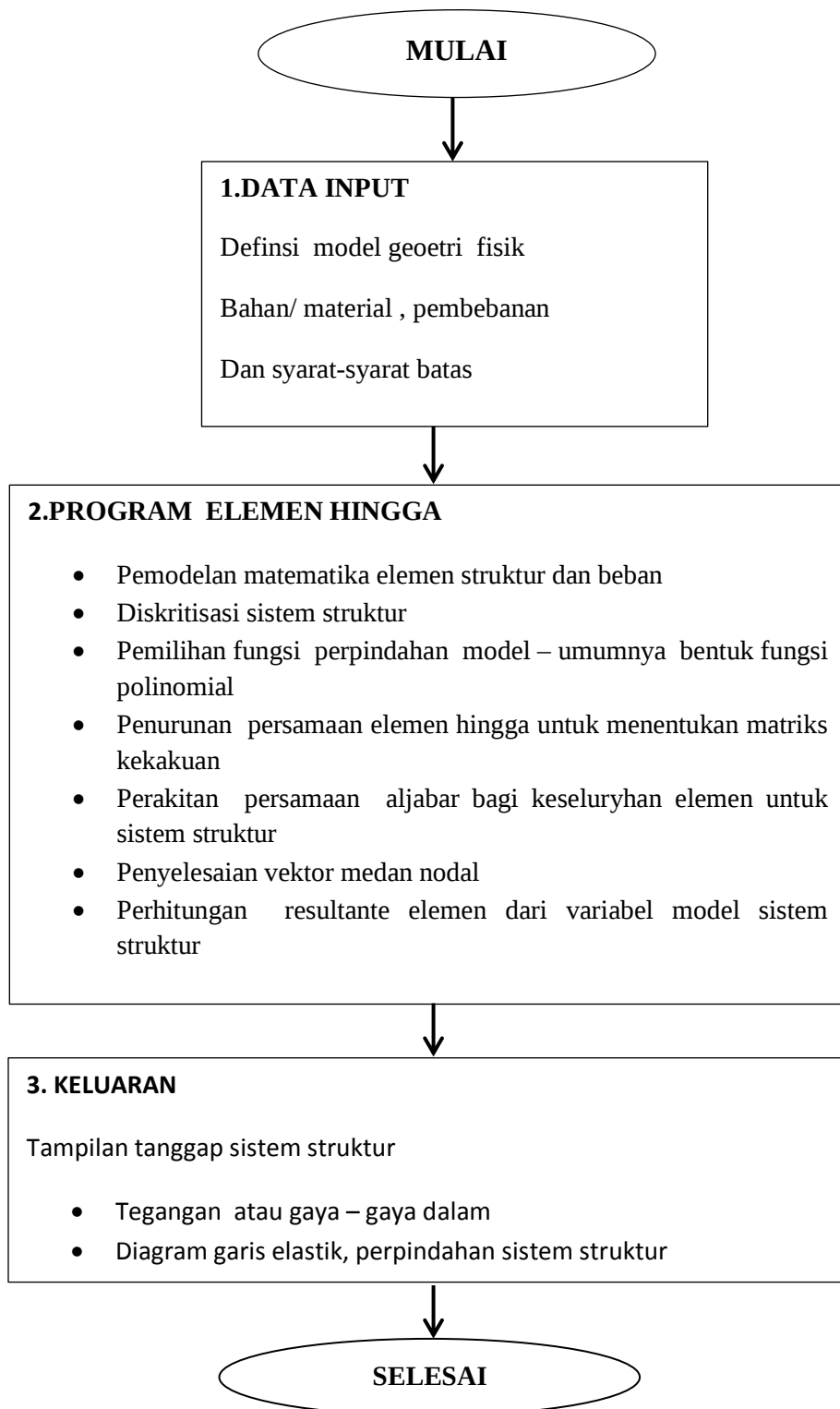
langkah – langkah yang dikerjakan dalam penulisan ini adalah :

1. menginput data- data tentang model dari geometri fisik , Bahan/ material, pembebanan dan syarat – syarat batas.
2. Program pemodelan matematika elemen struktur

Penyelesaian persamaan aljabar dari metoda elemen hingga dimungkinkan dengan merancang program yang umum untuk berbagai masalah mekanika struktur , program yang singkat ini pada tahap eksekusi, data input dan penetapan hubungan aljabar elemen dilakukan dalam proses berdasarkan formulasi metode analisis. Termasuk proses eksekusi program, semua yang diperlukan untuk penempatan hubungan aljabar elemen pada elemen lainnya membentuk matrik kekakuan global, yang menghasilkan solusi utuh struktur.

3. Keluaran dari proses eksekusi merupakan catatan penyelesaian analisis sistem struktur berupa tampilan gaya-gaya dalam dan deformasi. Penyajian secara grafik dari keluaran ini dapat berupa plot trayektori, tegangan, diagram gaya dalam , deformasi atau mode dari tekuk dan getaran.

Sifat program ini singkat, program ini ditujukan bagi kebutuhan yang spesifik , tidak untuk tujuan yang umum.



Gambar 3.5. Bagan alir program metoda elemen hingga

I . Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini secara garis besarnya diklasifikasi atas dua yaitu :

1. Data Primer adalah data yang diperoleh langsung dari literatur dan kepustakaan terkait
2. Data Sekunder adalah data yang diperoleh secara tidak langsung melalui penelitian kepustakaan, baik melalui dokumen – dokumen atau laporan tertulis maupun informasi lainnya terkait metoda elemen hingga

J. Teknik Pengumpulan Data

metoda yang digunakan dalam pengumpulan data dan informasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah ***Participatory Rapid Appraisal (PRA)*** meliputi :

1. Observasi

Penelitian ini dilakukan dengan cara mengadakan study kasus pada balok

2. Interview

Interview merupakan suatu cara untuk mendapatkan data atau informasi melalui kepustakaan dan literatur yang terkait

3. Dokumentasi

Dokumentasi adalah bentuk penulisan yang dilakukan dengan mengumpulkan dokumen atau arsip – arsip perusahaan yang berhubungan dengan masalah metoda elemen hingga

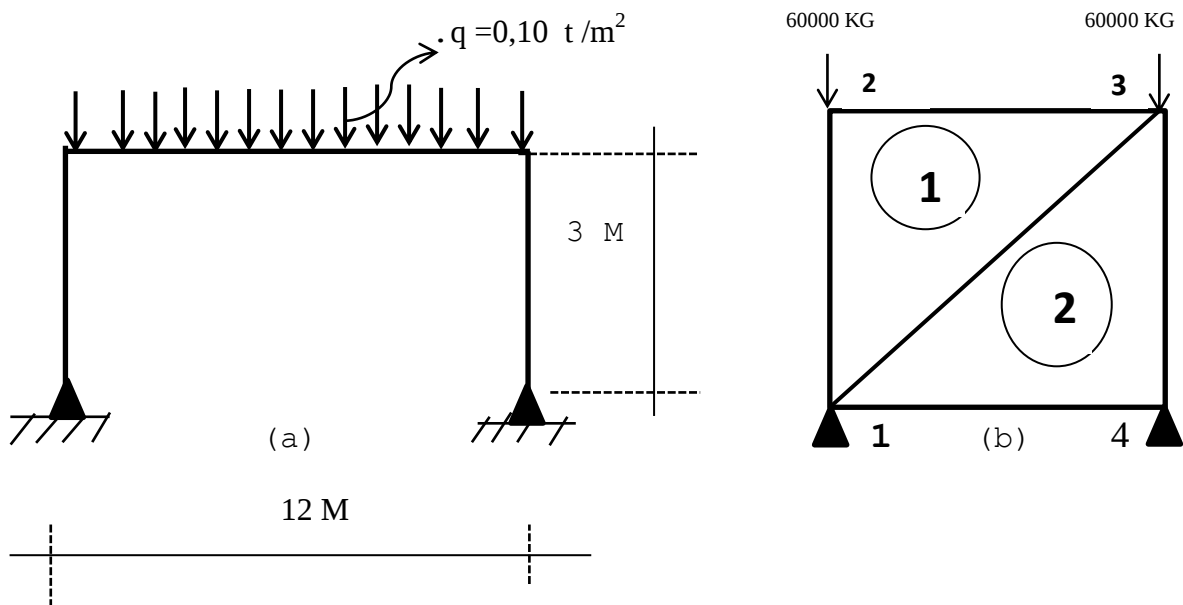
BAB IV

APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA

A. Aplikasi dengan cara Manual

Diketahui : Suatu Penampang balok beton dengan ketebalan konstan 2,5 cm . Dari bahan yang elastis homogeny, isotropic, terletak sepanjang tiga sisi dan terjepit disisi lainnya. Dibebani dengan suatu beban $q=0,10 \text{ Ton/M}^2$.

Hitunglah : Distribusi tegangan-teganagn dalam penampang balok tersebut, dimana angka poisson diambil $\nu=0,3$ dan nilai elastisitas bahan beton $E = 2,1 \times 10^3 \text{ Mpa}$



Gambar 4.1(a). idealisasi struktur tampak depan

Gambar 4.1(b) Pelat persegi Panjang Tipis Dibebani beban Vertikal Traksi Permukaan

$$F = \frac{1}{2} * q * A ,$$

Dimana , F = gaya vertikal (Kg)

.q= Beban , 0,10 ton = 100 Kg

**A.1. PADA BALOK TINGGI (DEEP BEAM) DENGAN PERBANDINGAN
TINGGI DAN BENTANG LEBIH DARI 2/5 UNTUK BALOK MENERUS
DIATAS DUA TUMPUAN**

Diketahui :

A = luasan balok beton (B= 20 cm ,H = 60 cm),

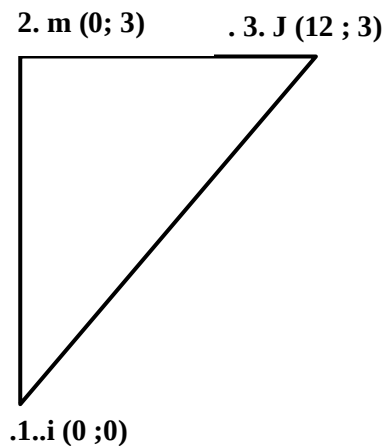
$$A = 20 \times 60 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$F = \frac{1}{2} \times 100 .x 20 \times 60$$

$$= 60.000 \text{ Kg}$$

A.1.1.MENENTUKAN TITIK NODAL

ELEMEN 1



$$X_i = 0 \quad X_j = 12 \quad X_m = 0$$

$$Y_i = 0 \quad Y_j = 3 \quad Y_m = 3$$

$$[B] = \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \tau_i & 0 & \tau_j & 0 & \tau_m \\ \tau_i & \beta_i & \tau_j & \beta_j & \tau_m & \beta_m \end{pmatrix}$$

Dimana :

$$\beta_i = Y_j - Y_m = 3 - 3 = 0$$

$$\beta_j = Y_m - Y_i = 3 - 0 = 3$$

$$\beta_m = Y_i - Y_j = 0 - 3 = -3$$

$$A = \frac{1}{2} bh$$

$$\tau_i = X_m - X_j = 0 - 12 = -12$$

$$= \frac{1}{2} * 20 * 60$$

$$\tau_j = X_i - X_m = 0 - 0 = 0$$

$$= 600 \text{ Cm}^2 = 0,06 \text{ M}^2$$

$$\tau_m = X_j - X_i = 12 - 0 = 12$$

$$E = 21.10^4 \text{ Mpa}$$

$$[B] = 1/1200 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ -12 & 0 & 0 & 3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$[D] = E / (1 + \nu) (1 - 2\nu) \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu) / 2 \end{pmatrix}$$

$$[D] = 21.10^4 / (1 + 0,3)(1 - 2*0,3) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$[B]^T [D] = 21.10^4 / 624 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$[B] [D] = 21.10^4 / 624 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0 \\ 2,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ -2,1 & -0,9 & 2,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3,6 & 8,4 & -0,6 \end{matrix}$$

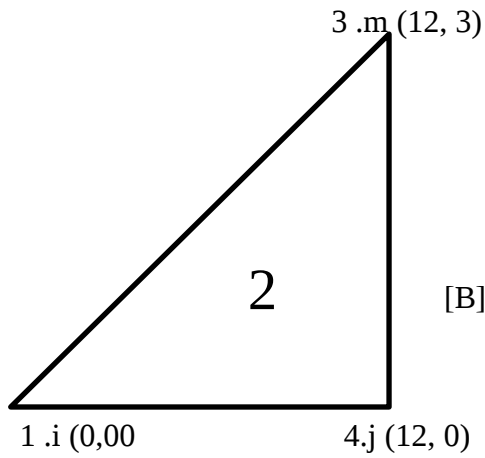
$$[K] = t A [B]^T [D] [B]$$

$$[K] = 2,5(600) \frac{21 \cdot 10^4}{624} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0 \\ 2,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ -2,1 & -0,9 & 2,4 \\ 3,6 & 8,4 & 0,6 \end{pmatrix} X$$

$$\frac{1}{1200} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ -12 & 0 & 0 & 3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$[K] = 262500 / 624 \begin{pmatrix} 28,8 & 0 & 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 \\ 0 & 100,8 & -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 \\ 0 & -10,8 & 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ -7,2 & 0 & 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -28,8 & 10,8 & -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 7,5 & -100,8 & 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

ELEMEN 2



$$X_1 = 0 \quad X_j = 12 \quad X_m = 12$$

$$Y_1 = 0 \quad Y_j = 0 \quad Y_m = 3$$

$$[B] = 1/2A \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \tau_i & 0 & \tau_j & 0 & \tau_m \\ \tau_i & \beta_i & \tau_j & \beta_j & \tau_m & \beta_m \end{pmatrix}$$

Dimana :

$$\beta_i = Y_j - Y_m = 0 - 3 = -3$$

$$\beta_j = Y_m - Y_i = 3 - 0 = 3$$

$$\beta_m = Y_i - Y_j = 0 - 0 = 0$$

$$\tau_i = X_m - X_j = 12 - 12 = 0$$

$$\tau_j = X_i - X_m = 0 - 12 = -12$$

$$\tau_m = X_j - X_i = 12 - 0 = 12$$

$$A = \frac{1}{2} bh$$

$$= \frac{1}{2} * 20 * 60$$

$$= 600 \text{ Cm}^2 = 0,06 \text{ M}^2$$

$$[B] = 1/0,12 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[B]^t [D] = 21.10^4 / 0,0624 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$[B] [D] = 21.10^4 / 0,0624 \begin{pmatrix} -2,1 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 \\ 2,1 & 0,9 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 2,4 \\ 3,6 & 8,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[K] = t A [B]^T [D] [B]$$

$$[K] = 0,025(0,06).21.10^4 / 0,0624 \begin{pmatrix} -2,1 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 \\ 2,1 & 0,9 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 2,4 \\ 3,6 & 8,4 & 0 \end{pmatrix} X$$

$$1/0,12 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[K] = 262500 / 624 \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 6,3 & 10,8 & 0 & -10,8 \\ 0 & 1,8 & 7,2 & -1,8 & -7,2 & 0 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ 10,8 & -1,8 & -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

A.1.2. MENGHITUNG KEKAKUAN LOKAL

ELEMEN 1

$$[K] = 262500 / 624 \begin{pmatrix} 28,8 & 0 & 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 \\ 0 & 100,8 & -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 \\ 0 & 10,8 & 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ -7,2 & 0 & 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -28,8 & 10,8 & -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 7,2 & 100,8 & 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

ELEMEN 2

$$[K] = 2625 / 0,0624 \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 6,3 & 10,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1,8 & 7,2 & -1,8 & -7,2 & 0 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ 10,8 & -1,8 & -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

A.1.3. MENGHITUNG KEKAKUAN STRUKTUR

ELEMEN 1

MENGHITUNG K^T

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

Yang dari sini kita dapat membentuk matriks baru C dari kofaktor – kofaktornya

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Dimana K_{11} merupakan kofaktor α_{11} , K_{ij} merupakan α_{ij}

$$K_{11} = + \begin{pmatrix} 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ 7,2 & 35,1 & -18 \\ 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = + (1,8 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 1,8) - (7,2 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)$$

$$= 11296,584$$

$$K_{12} = - \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = - (0 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 10,8) - (-6,3 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)$$

$$= 2918,916$$

$$K_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1,8 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & 102,6 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &+ (0 \times 7,2 \times 102,6) - (-1,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ &- (-6,3 \times 7,2 \times -18) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8) \end{aligned}$$

$$= -653,184$$

$$K_{14} = - \begin{pmatrix} 0 & 1,8 & 0,6 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 \\ 10,8 & 1,8 & -18 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &- (0 \times 7,2 \times -1,8) - (0,6 \times 7,2 \times 10,8) \\ &- (-6,3 \times 7,2 \times 35,1) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8) \end{aligned}$$

$$= 1568,808$$

$$K_{21} = + \begin{pmatrix} 0 & 6,3 & 10,8 \\ 7,2 & 35,1 & -18 \\ 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &+ (0 \times 35,1 \times 102,6) - (10,8 \times 35,1 \times 1,8) \\ &- (7,2 \times 35,1 \times -18) - (6,3 \times 35,1 \times -18) \end{aligned}$$

$$= 1250,964$$

$$K_{22} = - \begin{pmatrix} 6,3 & -6,3 & 10,8 \\ -6,3 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &- (6,3 \times 35,1 \times 102,6) - (10,8 \times 35,1 \times 10,8) \\ &- (-6,3 \times 35,1 \times -18) - (-6,3 \times 35,1 \times -18) \end{aligned}$$

$$= -10633,194$$

$$K_{23} = - \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 10,8 \\ -6,3 & 7,2 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & 102,6 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &- (6,3 \times 7,2 \times 102,6) - (10,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ &- (-6,3 \times 7,2 \times -18) - (0 \times 7,2 \times 1,8) \end{aligned}$$

$$= 2997,678$$

$$K_{24} = - \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 \\ 10,8 & 1,8 & -18 \end{pmatrix} = - (6,3 \times 7,2 \times -1,8) - (-6,3 \times 7,2 \times 10,8) \\ - (-6,3 \times 7,2 \times 35,1) - (0 \times 7,2 \times 1,8) \\ = - 1265,544$$

$$K_{31} = \begin{pmatrix} 0 & -6,3 & 10,8 \\ 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = (0 \times 0,6 \times 102,6) - (10,8 \times 0,6 \times 1,8) \\ -(1,8 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times -18) \\ = -99,792$$

$$K_{32} = \begin{pmatrix} 6,3 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 0,6 & -1,8 \\ 10,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = (6,3 \times 0,6 \times 102,6) - (10,8 \times 0,6 \times 10,8) \\ -(0 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times -18) \\ = -249,804$$

$$K_{33} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & -1,8 \\ 10,8 & 1,8 & 102,6 \end{pmatrix} = (6,3 \times 1,8 \times 102,6) - (10,8 \times 1,8 \times 10,8) \\ -(0 \times 1,8 \times -1,8) - (0 \times 1,8 \times 1,8) \\ = 953,532$$

$$K_{34} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 \\ 0 & 1,8 & 0,6 \\ 10,8 & 1,8 & -18 \end{pmatrix} = (6,3 \times 1,8 \times -1,8) - (-6,3 \times 1,8 \times 10,8) \\ -(0 \times 1,8 \times 0,6) - (0 \times 1,8 \times 1,8) \\ = -81,648$$

$$K_{41} = \begin{pmatrix} 0 & -6,3 & 10,8 \\ 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ 7,2 & 35,1 & -18 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &+ (0 \times 0,6 \times -18) - (10,8 \times 0,6 \times 7,2) \\ &- (1,8 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times 35,1) \end{aligned}$$

$$= 87,966$$

$$K_{42} = - \begin{pmatrix} 6,3 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 35,1 & -18 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &- (6,3 \times 0,6 \times -18) - (10,8 \times 0,6 \times -6,3) \\ &- (0 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times 35,1) \end{aligned}$$

$$= -105,462$$

$$K_{43} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & -18 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &(6,3 \times 1,8 \times -18) - (10,8 \times 1,8 \times -6,3) \\ &- (0 \times 1,8 \times -1,8) - (0 \times 1,8 \times 7,2) \end{aligned}$$

$$= -81,648$$

$$K_{44} = - \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 \\ 0 & 1,8 & 0,6 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &- (6,3 \times 1,8 \times 35,1) - (-6,3 \times 1,8 \times -6,3) \\ &- (0 \times 1,8 \times 0,6) - (0 \times 1,8 \times 7,2) \end{aligned}$$

$$= -326,592$$

$$\text{Matriks kofektor adalah } C^T = \begin{pmatrix} 11296,584 & 2918,916 & -653,184 & -1568,808 \\ 1250,964 & -10633,194 & 2997,648 & -1265,594 \\ -99,792 & -249,804 & 953,532 & -81,648 \\ 87,966 & -105,462 & -81,648 & -326,592 \end{pmatrix}$$

Sehingga $[K]^{-1}$

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

$$= 6,3((1,8 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 1,8) - (7,2 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)) \\ - 0((0 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 10,8) - (-6,3 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)) + \\ 6,3((0 \times 7,2 \times 102,6) - (-1,8 \times 7,2 \times 10,8) - (-6,3 \times 7,2 \times -18) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8)) \\ - 10,8((0 \times 7,2 \times -18) - (0,6 \times 7,2 \times 10,8) - (-6,3 \times 7,2 \times 35,1) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8))$$

$$= (42510,03) - (0) - (4115,059) - (16943,13)$$

$$= 21451,85$$

Maka invers matriks K diberikan oleh :

$$[K]^{-1} = 1/[K]_{DET} \begin{pmatrix} 11296,584 & 2918,916 & -653,184 & -1568,808 \\ 1250,964 & -10633,194 & 2997,648 & -1265,544 \\ -99,792 & -249,804 & 953,532 & -81,648 \\ 87,966 & -105,462 & -81,648 & -326,592 \end{pmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,526602 & 0,13607 & -0,03045 & -0,07313 \\ 0,058315 & -0,49568 & -0,139738 & -0,05899 \\ -0,00465 & -0,01164 & 0,04445 & 0,00381 \\ 0,004101 & -0,00492 & -0,00381 & -0,01522 \end{pmatrix}$$

A.1. 4. MENGHITUNG PERPINDAHAN TITIK

$$[F] = [K] (d)$$

$$(d) = [K]^{-1} \{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 2A / E \begin{pmatrix} 0,526602 & 0,136068 & -0,03045 & -0,07313 \\ 0,053315 & -0,49568 & -0,139738 & -0,05899 \\ -0,00465 & -0,01164 & 0,04445 & 0,003806 \\ 0,004101 & -0,00492 & -0,00381 & -0,01522 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 60000 \\ 0 \\ 60000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 1200 / 210000 \begin{pmatrix} 3776,201 \\ -33280,32 \\ -470,326 \\ -1208,439 \end{pmatrix} \begin{matrix} 21,57829 \text{ cm} \\ = -190,1733 \text{ cm} \\ -2,687577 \text{ cm} \\ - 6,905364 \text{ c m} \end{matrix}$$

A.1. 5. MENGHITUNG TEGANGAN TEGANGAN ELEMEN

ELEMEN 1

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{d\} \text{ dimana } \sigma = \text{tegangan normal (lihat pers. 3.48)}$$

$$[D] [B] = 210000 / 624 \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 624 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 0,6 & -2,4 & 0,6 & 2,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 624 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ 0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 0 & -2,4 & 0,6 & 2,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d1x \\ d1y \\ .d3x \\ .d3y \\ .d2x \\ .d2y \end{Bmatrix}$$

$$.\sigma = 210000 / 624 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ 0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 0 & -2,4 & 0,6 & 2,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0000000 \\ 0,0000000 \\ -2,687577 \\ -6,905364 \\ 21,57829 \\ -190,1733 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .\sigma_x \\ .\sigma_y \\ .\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = 336 \begin{pmatrix} -665,4083214 \\ -1541,869109 \\ 54,09486535 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -223935,5 \text{ Kg/Cm}^2 \\ -518898,3 \text{ Kg/Cm}^2 \\ 18205,003 \text{ Kg/Cm}^2 \end{matrix}$$

ELEMEN 2

MENGHITUNG K^T

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

Yang dari sini kita dapat membentuk matriks baru C dari kofaktor – kofaktornya

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Dimana K_{11} merupakan kofaktor α_{11} , K_{ij} merupakan α_{ij}

$$\begin{aligned} K_{11} &= + \begin{pmatrix} 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 7,2 & 28,8 & 0 \\ -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = + (102,6 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times \\ & \quad -100,8) - (7,2 \times 28,8 \times 0) - (7,2 \times 28,8 \times 0) \\ &= 5225,472 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12} &= - \begin{pmatrix} -18 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = - (-18 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times 10,8) \\ & \quad - (28,8 \times 28,8 \times 0) - (7,2 \times 28,8 \times 0) \\ &= 20901,89 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{13} = + \begin{pmatrix} -18 & 102,6 & -100,8 \\ -28,8 & 7,2 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 100,8 \end{pmatrix} = + (-18 \times 7,2 \times 100,8) - (-100,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(-28,8 \times 7,2 \times 0) - (102,6 \times 7,2 \times 100,8) \\ = 69237,50$$

$$\mathbf{K}_{14} = - \begin{pmatrix} -18 & 102,6 & 7,2 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 \\ 10,8 & -100,8 & 0 \end{pmatrix} = - (-18 \times 7,2 \times 0) - (7,2 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(-28,8 \times 7,2 \times 28,8) - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) \\ = -73903,104$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{pmatrix} -18 & -28,8 & 10,8 \\ 7,2 & 28,8 & 0 \\ -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = (18 \times 28,8 \times 100,8) - (10,8 \times 28,8 \times -100,8) \\ -(7,2 \times 28,8 \times 0) - (-28,8 \times 28,8 \times 0) \\ = -20901,89$$

$$\mathbf{K}_{22} = - \begin{pmatrix} 35,1 & -28,8 & 10,8 \\ -28,8 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & 0 & 10,8 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 28,8 \times 10,8) - (10,8 \times 28,8 \times 10,8) \\ -(-28,8 \times 28,8 \times 0) - (-28,8 \times 28,8 \times 0) \\ = -98537,47$$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 10,8 \\ 28,8 & 7,2 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 100,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 7,2 \times 100,8) - (10,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(28,8 \times 7,2 \times 0) - (-18 \times 7,2 \times 100,8) \\ = 11570,64$$

$$\mathbf{K}_{24} = - \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 \\ 10,8 & -100,8 & 0 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 7,2 \times 0) - (-28,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ - (-28,8 \times 7,2 \times 28,8) - (-18 \times 7,2 \times -100,8) \\ = 4599,504$$

$$\mathbf{K}_{31} = \begin{pmatrix} -18 & -28,8 & 10,8 \\ 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = (-18 \times 7,2 \times 100,8) - (10,8 \times 7,2 \times -100,8) \\ -(102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 0) \\ = 69237,504$$

$$\mathbf{K}_{32} = \begin{pmatrix} 35,1 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 7,2 & -100,8 \\ 10,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 7,2 \times 100,8) - (10,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(-18 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 0) \\ = -11570,688$$

$$\mathbf{K}_{33} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & -100,8 \\ 10,8 & -100,8 & 100,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 102,6 \times 100,8) - (10,8 \times 102,6 \times 10,8) \\ -(-18 \times 102,6 \times -100,8) - (-18 \times 102,6 \times -100,8) \\ = -21275,136$$

$$\mathbf{K}_{34} = - \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 28,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 \\ 10,8 & -100,8 & 0 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 102,6 \times 0) - (28,8 \times 102,6 \times 10,8) \\ -(-18 \times 102,6 \times 7,2) - (-18 \times 102,6 \times -100,8) \\ = 140947,78$$

$$\mathbf{K}_{41} = \begin{pmatrix} -18 & 28,8 & 10,8 \\ 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 7,2 & 28,8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &+ (-18 \times 7,2 \times 0) - (10,8 \times 7,2 \times 7,2) \\ &- (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (28,8 \times 7,2 \times 28,8) \end{aligned}$$

$$= 79875,072$$

$$\mathbf{K}_{42} = - \begin{pmatrix} 35,1 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 28,8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &- (35,1 \times 7,2 \times 0) - (10,8 \times 7,2 \times -28,8) \\ &- (-18 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 28,8) \end{aligned}$$

$$= 4852,224$$

$$\mathbf{K}_{43} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & -100,8 \\ 28,8 & 7,2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &(35,1 \times 102,6 \times 0) - (10,8 \times 102,6 \times 28,8) \\ &- (-18 \times 102,6 \times -100,8) - (-18 \times 102,6 \times 7,2) \end{aligned}$$

$$= -140948$$

$$\mathbf{K}_{44} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 \end{pmatrix} = \begin{aligned} &(35,1 \times 102,6 \times 28,8) - (-28,8 \times 102,6 \times -28,8) \\ &- (-18 \times 102,6 \times 7,2) - (-18 \times 102,6 \times 7,2) \end{aligned}$$

$$= -45209,664$$

$$\text{Matriks kofektor adalah } \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 5225,472 & 20901,888 & 69237,500 & -73903,104 \\ -20901,89 & -98537,47 & 11570,69 & 4599,504 \\ 69237,504 & -11570,69 & -21275,10 & 140947,78 \\ 79875,072 & 4852,224 & -140948 & -45209,664 \end{pmatrix}$$

Sehingga $[K]^{-1}$

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

$$= 35,1((102,6 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times -100,8) - (7,2 \times 28,8 \times 0) - (7,2 \times 28,8 \times 0)) + 18((-18 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times 10,8) - (7,2 \times 28,8 \times 0) - (-28,8 \times 28,8 \times 0)) + 28,8 \times ((-18 \times 7,2 \times 100,8) - (100,8 \times 7,2 \times 10,8) - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 0)) - 10,8 \times ((-18 \times 7,2 \times 0) - (7,2 \times 7,2 \times 10,8) - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 28,8))$$

$$= (183414,1) - (376233,986) - (0) - (862650,776)$$

$$= -1054471$$

Maka invers matriks K diberikan oleh :

$$[K]^{-1} = 1/[K]_{DET} \begin{pmatrix} 5225,472 & 20901,888 & 69237,5 & -73903,1 \\ -20901,88 & -98537,47 & 11570,69 & 4599,504 \\ 69237,504 & 11570,698 & -21275,100 & 140947,78 \\ 79875,072 & 4852,224 & -140948 & 45209,66 \end{pmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,00495 & -0,01980 & -0,06560 & -0,070019 \\ 0,01980 & 0,09336 & -0,01096 & -0,00436 \\ -0,06560 & 0,01096 & -0,02016 & -0,13354 \\ -0,07568 & -0,00460 & 0,13354 & 0,04283 \end{pmatrix}$$

$$[F] = [K] (d)$$

$$(d) = [K^{-1}] \{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 2A / E \begin{pmatrix} -0,00495 & -0,01980 & -0,06560 & -0,070019 \\ 0,01980 & 0,09336 & -0,01096 & 0,00436 \\ -0,06560 & 0,01096 & -0,02016 & -0,13354 \\ -0,07568 & -0,00460 & 0,13354 & 0,04283 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 60000 \\ 0 \\ 60000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 1200 / 210000 \begin{pmatrix} 3012,9429 \\ 5340,0612 \\ -7354,657 \\ 2294,1863 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 17,21682 \text{ cm} \\ 30,51464 \text{ cm} \\ -42,02661 \text{ cm} \\ -13,10964 \text{ cm} \end{matrix}$$

ELEMEN 2

$$\{.\sigma\} = [D] [B] \{ d \}$$

$$[D] [B] = 210000 / 624 \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 624 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 6 & -24 & 6 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 624 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 6 & -24 & 6 & 24 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} .d1x \\ .d1y \\ .d4x \\ .d4y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix}$$

$$.\sigma = 210000 / 624 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 6 & -24 & 6 & 24 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0000000 \\ 0,0000000 \\ 17,21682 \\ 30,51464 \\ -42,02661 \\ 13,10964 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .\sigma_x \\ .\sigma_y \\ .\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = 336,54 \begin{pmatrix} -26,50268255 \\ -130,7068594 \\ -123,8754509 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -8919,172 \text{ Kg/Cm}^2 \\ -43987,89 \text{ Kg/Cm}^2 \\ -41688,85 \text{ Kg/Cm}^2 \end{matrix}$$

**A.2. PADA BALOK TINGGI (DEEP EAM) DENGAN PERBANDINGAN
TINGGI DAN BENTANG LEBIH DARI 4/5 UNTUK BALOK MENERUS
DIATAS DUA TUMPUAN**

Diketahui :

A = luasan balok beton (B= 40 cm ,H = 80 cm),

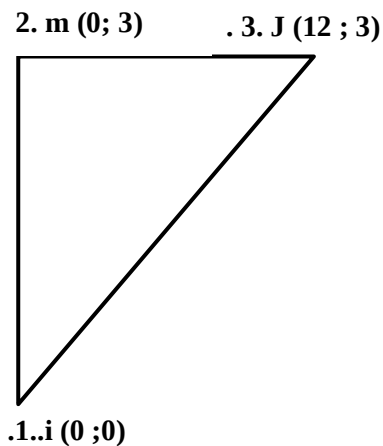
$$A = 40 \times 80 = 3200 \text{ cm}^2$$

$$F = \frac{1}{2} \times 100 \times 40 \times 80$$

$$= 160.000 \text{ Kg}$$

A.2.1.MENENTUKAN TITIK NODAL

ELEMEN 1



$$X_i = 0 \quad X_j = 12 \quad X_m = 0$$

$$Y_i = 0 \quad Y_j = 3 \quad Y_m = 3$$

$$[B] = \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \tau_i & 0 & \tau_j & 0 & \tau_m \\ T_i & \beta_i & \tau_j & \beta_j & \tau_m & \beta_m \end{pmatrix}$$

Dimana :

$$\beta_i = Y_j - Y_m = 3 - 3 = 0$$

$$\beta_j = Y_m - Y_i = 3 - 0 = 3$$

$$\beta_m = Y_i - Y_j = 0 - 3 = -3$$

$$A = \frac{1}{2} b h$$

$$\tau_i = X_m - X_j = 0 - 12 = -12$$

$$= \frac{1}{2} * 40 * 80$$

$$\tau_j = X_i - X_m = 0 - 0 = 0$$

$$= 1600 \text{ Cm}^2 = 0,16 \text{ M}^2$$

$$\tau_m = X_j - X_i = 12 - 0 = 12$$

$$E = 21.10^4 \text{ Mpa}$$

$$[B] = 1/1200 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ -12 & 0 & 0 & 3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$[D] = E / (1 + \nu) (1 - 2\nu) \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu) / 2 \end{pmatrix}$$

$$[D] = 21.10^4 / (1 + 0,3)(1 - 2*0,3) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$[B]^T [D] = 21.10^4 / 624 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$[B] [D] = 21.10^4 / 624 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0 \\ 2,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ -2,1 & -0,9 & 2,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3,6 & 8,4 & -0,6 \end{matrix}$$

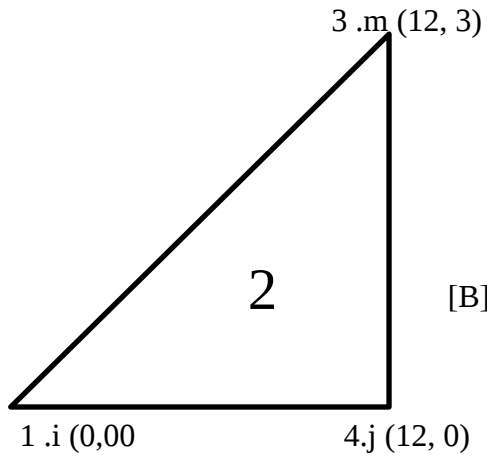
$$[K] = t A [B]^T [D] [B]$$

$$[K] = 2,5(600) \frac{21 \cdot 10^4}{624} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0 \\ 2,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ -2,1 & -0,9 & 2,4 \\ 3,6 & 8,4 & 0,6 \end{pmatrix} \times$$

$$\frac{1}{1200} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ -12 & 0 & 0 & 3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$[K] = \frac{262500}{624} \begin{pmatrix} 28,8 & 0 & 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 \\ 0 & 100,8 & -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 \\ 0 & -10,8 & 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ -7,2 & 0 & 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -28,8 & 10,8 & -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 7,5 & -100,8 & 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

ELEMEN 2



$$X_1 = 0 \quad X_j = 12 \quad X_m = 12$$

$$Y_1 = 0 \quad Y_j = 0 \quad Y_m = 3$$

$$[B] = 1/2A \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \tau_i & 0 & \tau_j & 0 & \tau_m \\ \tau_i & \beta_i & \tau_j & \beta_j & \tau_m & \beta_m \end{pmatrix}$$

Dimana :

$$\beta_i = Y_j - Y_m = 0 - 3 = -3$$

$$\beta_j = Y_m - Y_i = 3 - 0 = 3$$

$$\beta_m = Y_i - Y_j = 0 - 0 = 0$$

$$\tau_i = X_m - X_j = 12 - 12 = 0$$

$$\tau_j = X_i - X_m = 0 - 12 = -12$$

$$\tau_m = X_j - X_i = 12 - 0 = 12$$

$$A = \frac{1}{2} bh$$

$$= \frac{1}{2} * 40 * 80$$

$$= 1600 \text{ Cm}^2 = 0,16 \text{ M}^2$$

$$[B] = 1/0,12 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[B]^t [D] = 21 \cdot 10^4 / 0,0624 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -12 \\ 0 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$[B] [D] = 21 \cdot 10^4 / 0,0624 \begin{pmatrix} -2,1 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 \\ 2,1 & 0,9 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 2,4 \\ 3,6 & 8,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[K] = t A [B]^T [D] [B]$$

$$[K] = 0,025(0,06) \cdot 21 \cdot 10^4 / 0,0624 \begin{pmatrix} -2,1 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 \\ 2,1 & 0,9 & -2,4 \\ -3,6 & -8,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 2,4 \\ 3,6 & 8,4 & 0 \end{pmatrix} \quad X$$

$$1/0,12 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[K] = 262500 / 624 \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 6,3 & 10,8 & 0 & -10,8 \\ 0 & 1,8 & 7,2 & -1,8 & -7,2 & 0 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ 10,8 & -1,8 & -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

A.2.2. MENGHITUNG KEKAKUAN LOKAL

ELEMEN 1

$$[K] = 262500 / 624 \begin{pmatrix} 28,8 & 0 & 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 \\ 0 & 100,8 & -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 \\ 0 & 10,8 & 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ -7,2 & 0 & 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -28,8 & 10,8 & -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 7,2 & 100,8 & 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

ELEMEN 2

$$[K] = 2625 / 0,0624 \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 6,3 & 10,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1,8 & 7,2 & -1,8 & -7,2 & 0 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ 10,8 & -1,8 & -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 0 & -7,2 & -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ -10,8 & 0 & 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

A.2.3. MENGHITUNG KEKAKUAN STRUKTUR

ELEMEN 1

MENGHITUNG K^T

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

Yang dari sini kita dapat membentuk matriks baru C dari kofaktor – kofaktornya

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Dimana K_{11} merupakan kofaktor α_{11} , K_{ij} merupakan α_{ij}

$$K_{11} = + \begin{pmatrix} 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ 7,2 & 35,1 & -18 \\ 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = + (1,8 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 1,8) - (7,2 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)$$

$$= 11296,584$$

$$K_{12} = - \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = - (0 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 10,8) - (-6,3 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)$$

$$= 2918,916$$

$$\begin{aligned}
K_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 1,8 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & 102,6 \end{pmatrix} = + (0 \times 7,2 \times 102,6) - (-1,8 \times 7,2 \times 10,8) \\
&\quad - (-6,3 \times 7,2 \times -18) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8) \\
&= -653,184
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{14} &= - \begin{pmatrix} 0 & 1,8 & 0,6 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 \\ 10,8 & 1,8 & -18 \end{pmatrix} = - (0 \times 7,2 \times -1,8) - (0,6 \times 7,2 \times 10,8) \\
&\quad - (-6,3 \times 7,2 \times 35,1) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8) \\
&= 1568,808
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{21} &= + \begin{pmatrix} 0 & 6,3 & 10,8 \\ 7,2 & 35,1 & -18 \\ 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} + (0 \times 35,1 \times 102,6) - (10,8 \times 35,1 \times 1,8) \\
&\quad - (7,2 \times 35,1 \times -18) - (6,3 \times 35,1 \times -18) \\
&= 1250,964
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= - \begin{pmatrix} 6,3 & -6,3 & 10,8 \\ -6,3 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = - (6,3 \times 35,1 \times 102,6) - (10,8 \times 35,1 \times 10,8) \\
&\quad - (-6,3 \times 35,1 \times -18) - (-6,3 \times 35,1 \times -18) \\
&= -10633,194
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{23} &= - \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 10,8 \\ -6,3 & 7,2 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & 102,6 \end{pmatrix} = - (6,3 \times 7,2 \times 102,6) - (10,8 \times 7,2 \times 10,8) \\
&\quad - (-6,3 \times 7,2 \times -18) - (0 \times 7,2 \times 1,8) \\
&= 2997,678
\end{aligned}$$

$$K_{24} = - \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 \\ 10,8 & 1,8 & -18 \end{pmatrix} = - (6,3 \times 7,2 \times -1,8) - (-6,3 \times 7,2 \times 10,8) \\ - (-6,3 \times 7,2 \times 35,1) - (0 \times 7,2 \times 1,8) \\ = - 1265,544$$

$$K_{31} = \begin{pmatrix} 0 & -6,3 & 10,8 \\ 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = (0 \times 0,6 \times 102,6) - (10,8 \times 0,6 \times 1,8) \\ -(1,8 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times -18) \\ = -99,792$$

$$K_{32} = \begin{pmatrix} 6,3 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 0,6 & -1,8 \\ 10,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix} = (6,3 \times 0,6 \times 102,6) - (10,8 \times 0,6 \times 10,8) \\ -(0 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times -18) \\ = -249,804$$

$$K_{33} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & -1,8 \\ 10,8 & 1,8 & 102,6 \end{pmatrix} = (6,3 \times 1,8 \times 102,6) - (10,8 \times 1,8 \times 10,8) \\ -(0 \times 1,8 \times -1,8) - (0 \times 1,8 \times 1,8) \\ = 953,532$$

$$K_{34} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 \\ 0 & 1,8 & 0,6 \\ 10,8 & 1,8 & -18 \end{pmatrix} = (6,3 \times 1,8 \times -1,8) - (-6,3 \times 1,8 \times 10,8) \\ -(0 \times 1,8 \times 0,6) - (0 \times 1,8 \times 1,8) \\ = -81,648$$

$$K_{41} = \begin{pmatrix} 0 & -6,3 & 10,8 \\ 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ 7,2 & 35,1 & -18 \end{pmatrix} = + (0 \times 0,6 \times -18) - (10,8 \times 0,6 \times 7,2) \\ - (1,8 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times 35,1) \\ = 87,966$$

$$K_{42} = - \begin{pmatrix} 6,3 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 35,1 & -18 \end{pmatrix} = - (6,3 \times 0,6 \times -18) - (10,8 \times 0,6 \times -6,3) \\ - (0 \times 0,6 \times -1,8) - (-6,3 \times 0,6 \times 35,1) \\ = -105,462$$

$$K_{43} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & -18 \end{pmatrix} = (6,3 \times 1,8 \times -18) - (10,8 \times 1,8 \times -6,3) \\ - (0 \times 1,8 \times -1,8) - (0 \times 1,8 \times 7,2) \\ = -81,648$$

$$K_{44} = - \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 \\ 0 & 1,8 & 0,6 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 \end{pmatrix} = - (6,3 \times 1,8 \times 35,1) - (-6,3 \times 1,8 \times -6,3) \\ - (0 \times 1,8 \times 0,6) - (0 \times 1,8 \times 7,2) \\ = -326,592$$

$$\text{Matriks kofektor adalah } C^T = \begin{pmatrix} 11296,584 & 2918,916 & -653,184 & -1568,808 \\ 1250,964 & -10633,194 & 2997,648 & -1265,594 \\ -99,792 & -249,804 & 953,532 & -81,648 \\ 87,966 & -105,462 & -81,648 & -326,592 \end{pmatrix}$$

Sehingga $[K]^{-1}$

$$[K]_{\text{DET}} = \begin{pmatrix} 6,3 & 0 & -6,3 & 10,8 \\ 0 & 1,8 & 0,6 & -1,8 \\ -6,3 & 7,2 & 35,1 & -18 \\ 10,8 & 1,8 & -18 & 102,6 \end{pmatrix}$$

$$= 6,3((1,8 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 1,8) - (7,2 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)) \\ - 0((0 \times 35,1 \times 102,6) - (-1,8 \times 35,1 \times 10,8) - (-6,3 \times 35,1 \times -18) - (0,6 \times 35,1 \times -18)) + \\ 6,3((0 \times 7,2 \times 102,6) - (-1,8 \times 7,2 \times 10,8) - (-6,3 \times 7,2 \times -18) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8)) \\ - 10,8((0 \times 7,2 \times -18) - (0,6 \times 7,2 \times 10,8) - (-6,3 \times 7,2 \times 35,1) - (1,8 \times 7,2 \times 1,8))$$

$$= (42510,03) - (0) - (4115,059) - (16943,13)$$

$$= 21451,85$$

Maka invers matriks K diberikan oleh :

$$[K]^1 = 1/[K]_{\text{DET}} \begin{pmatrix} 11296,584 & 2918,916 & -653,184 & -1568,808 \\ 1250,964 & -10633,194 & 2997,648 & -1265,544 \\ -99,792 & -249,804 & 953,532 & -81,648 \\ 87,966 & -105,462 & -81,648 & -326,592 \end{pmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,526602 & 0,13607 & -0,03045 & -0,07313 \\ 0,058315 & -0,49568 & -0,139738 & -0,05899 \\ -0,00465 & -0,01164 & 0,04445 & 0,00381 \\ 0,004101 & -0,00492 & -0,00381 & -0,01522 \end{pmatrix}$$

A.2. 4 .M ENGHITING PERPINDAHAN TITIK

$$[F] = [K] (d)$$

$$(d) = [K^{-1}] \{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 2A / E \begin{pmatrix} 0,526602 & 0,136068 & -0,03045 & -0,07313 \\ 0,053315 & -0,49568 & -0,139738 & -0,05899 \\ -0,00465 & -0,01164 & 0,04445 & 0,003806 \\ 0,004101 & -0,00492 & -0,00381 & -0,01522 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 160000 \\ 0 \\ 160000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 3200 / 210000 \begin{pmatrix} 10069,9 \\ -88747,5 \\ -1254,2 \\ -3222,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 153,446 \text{ cm} \\ -1352,31 \text{ cm} \\ -19,1117 \text{ cm} \\ -49,1048 \text{ cm} \end{matrix}$$

A.2. 5. MENGHITUNG TEGANGAN TEGANGAN ELEMEN

ELEMEN 1

$\{\sigma\} = [D] [B] \{d\}$ dimana σ = tegangan normal (lihat pers. 3.48)

$$[D] [B] = 210000 / 1664 \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 1664 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 0,6 & -2,4 & 0,6 & 2,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 1664 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ 0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 0 & -2,4 & 0,6 & 2,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d1x \\ d1y \\ .d3x \\ .d3y \\ .d2x \\ .d2y \end{Bmatrix}$$

$$.\sigma = 210000 / 1664 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ 0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 0 & -2,4 & 0,6 & 2,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0000000 \\ 0,0000000 \\ -19,117 \\ -49,1048 \\ 153,446 \\ -1352,34 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .\sigma_x \\ .\sigma_y \\ .\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = 336 \begin{pmatrix} -4731,792508 \\ -1064,40225 \\ 384,67459 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -5921161 \text{ Kg/Cm}^2 \\ -1383729 \text{ Kg/Cm}^2 \\ 48546,7 \text{ Kg/Cm}^2 \end{matrix}$$

ELEMEN 2

MENGHITUNG K^T

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

Yang dari sini kita dapat membentuk matriks baru C dari kofaktor – kofaktornya

$$[K]_{DET} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Dimana K_{11} merupakan kofaktor α_{11} , K_{ij} merupakan α_{ij}

$$\begin{aligned} K_{11} &= + \begin{pmatrix} 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 7,2 & 28,8 & 0 \\ -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = + (102,6 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times \\ & -100,8) - (7,2 \times 28,8 \times 0) - (7,2 \times 28,8 \times 0) \\ &= 5225,472 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12} &= - \begin{pmatrix} -18 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = - (-18 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times 10,8) \\ & - (28,8 \times 28,8 \times 0) - (7,2 \times 28,8 \times 0) \\ &= 20901,89 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{13} = + \begin{pmatrix} -18 & 102,6 & -100,8 \\ -28,8 & 7,2 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 100,8 \end{pmatrix} = + (-18 \times 7,2 \times 100,8) - (-100,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(-28,8 \times 7,2 \times 0) - (102,6 \times 7,2 \times 100,8) \\ = 69237,50$$

$$\mathbf{K}_{14} = - \begin{pmatrix} 18 & 102,6 & 7,2 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 \\ 10,8 & -100,8 & 0 \end{pmatrix} = - (-18 \times 7,2 \times 0) - (7,2 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(-28,8 \times 7,2 \times 28,8) - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) \\ = -73903,104$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{pmatrix} 18 & -28,8 & 10,8 \\ 7,2 & 28,8 & 0 \\ -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = (18 \times 28,8 \times 100,8) - (10,8 \times 28,8 \times -100,8) \\ -(7,2 \times 28,8 \times 0) - (-28,8 \times 28,8 \times 0) \\ = -20901,89$$

$$\mathbf{K}_{22} = - \begin{pmatrix} 35,1 & -28,8 & 10,8 \\ -28,8 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & 0 & 10,8 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 28,8 \times 10,8) - (10,8 \times 28,8 \times 10,8) \\ -(-28,8 \times 28,8 \times 0) - (-28,8 \times 28,8 \times 0) \\ = -98537,47$$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 10,8 \\ 28,8 & 7,2 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 100,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 7,2 \times 100,8) - (10,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ -(28,8 \times 7,2 \times 0) - (-18 \times 7,2 \times 100,8) \\ = 11570,64$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{24} &= - \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 \\ 10,8 & -100,8 & 0 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 7,2 \times 0) - (-28,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ &\quad - (-28,8 \times 7,2 \times 28,8) - (-18 \times 7,2 \times -100,8) \\ &= 4599,504 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{31} &= \begin{pmatrix} -18 & -28,8 & 10,8 \\ 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = (-18 \times 7,2 \times 100,8) - (10,8 \times 7,2 \times -100,8) \\ &\quad - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 0) \\ &= 69237,504 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{32} &= \begin{pmatrix} 35,1 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 7,2 & -100,8 \\ 10,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 7,2 \times 100,8) - (10,8 \times 7,2 \times 10,8) \\ &\quad - (-18 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 0) \\ &= -11570,688 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{33} &= \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & -100,8 \\ 10,8 & -100,8 & 100,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 102,6 \times 100,8) - (10,8 \times 102,6 \times 10,8) \\ &\quad - (-18 \times 102,6 \times -100,8) - (-18 \times 102,6 \times -100,8) \\ &= -21275,136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{34} &= - \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 28,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 \\ 10,8 & -100,8 & 0 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 102,6 \times 0) - (28,8 \times 102,6 \times 10,8) \\ &\quad - (-18 \times 102,6 \times 7,2) - (-18 \times 102,6 \times -100,8) \\ &= 140947,78 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{41} = \begin{pmatrix} -18 & 28,8 & 10,8 \\ 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ 7,2 & 28,8 & 0 \end{pmatrix} = + (-18 \times 7,2 \times 0) - (10,8 \times 7,2 \times 7,2) \\ - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (28,8 \times 7,2 \times 28,8) \\ = 79875,072$$

$$\mathbf{K}_{42} = - \begin{pmatrix} 35,1 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 28,8 & 0 \end{pmatrix} = - (35,1 \times 7,2 \times 0) - (10,8 \times 7,2 \times -28,8) \\ - (-18 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 28,8) \\ = 4852,224$$

$$\mathbf{K}_{43} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & -100,8 \\ 28,8 & 7,2 & 0 \end{pmatrix} = (35,1 \times 102,6 \times 0) - (10,8 \times 102,6 \times 28,8) \\ - (-18 \times 102,6 \times -100,8) - (-18 \times 102,6 \times 7,2) \\ = -140948$$

$$\mathbf{K}_{44} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 \end{pmatrix} = (35,1 \times 102,6 \times 28,8) - (-28,8 \times 102,6 \times -28,8) \\ - (-18 \times 102,6 \times 7,2) - (-18 \times 102,6 \times 7,2) \\ = -45209,664$$

$$\text{Matriks kofektor adalah } \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 5225,472 & 20901,888 & 69237,500 & -73903,104 \\ -20901,89 & -98537,47 & 11570,69 & 4599,504 \\ 69237,504 & -11570,69 & -21275,10 & 140947,78 \\ 79875,072 & 4852,224 & -140948 & -45209,664 \end{pmatrix}$$

Sehingga $[K]^{-1}$

$$[K]_{\text{DET}} = \begin{pmatrix} 35,1 & -18 & -28,8 & 10,8 \\ -18 & 102,6 & 7,2 & -100,8 \\ -28,8 & 7,2 & 28,8 & 0 \\ 10,8 & -100,8 & 0 & 100,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 35,1 \times ((102,6 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times -100,8) - (7,2 \times 28,8 \times 0) \\ &\quad - (7,2 \times 28,8 \times 0)) + 18 \times ((-18 \times 28,8 \times 100,8) - (-100,8 \times 28,8 \times 10,8) - (7,2 \times 28,8 \\ &\quad \times 0) - (-28,8 \times 28,8 \times 0)) + 28,8 \times ((-18 \times 7,2 \times 100,8) - (100,8 \times 7,2 \times 10,8) - \\ &\quad (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 0)) - 10,8 \times ((-18 \times 7,2 \times 0) - (7,2 \times 7,2 \\ &\quad \times 10,8) - (102,6 \times 7,2 \times -100,8) - (-28,8 \times 7,2 \times 28,8)) \\ &= (183414,1) - (376233,986) - (0) - (862650,776) \\ &= -1054471 \end{aligned}$$

Maka invers matriks K diberikan oleh :

$$[K]^{-1} = 1/[K]_{\text{DET}} \begin{pmatrix} 5225,472 & 20901,888 & 69237,5 & -73903,1 \\ -20901,88 & -98537,47 & 11570,69 & 4599,504 \\ 69237,504 & 11570,698 & -21275,100 & 140947,78 \\ 79875,072 & 4852,224 & -140948 & 45209,66 \end{pmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,00495 & -0,01980 & -0,06560 & -0,070019 \\ 0,01980 & 0,09336 & -0,01096 & -0,00436 \\ -0,06560 & 0,01096 & -0,02016 & -0,13354 \\ -0,07568 & -0,00460 & 0,13354 & 0,04283 \end{pmatrix}$$

$$[F] = [K] (d)$$

$$(d) = [K^{-1}] \{F\}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 2A / E \begin{pmatrix} -0,00495 & -0,01980 & -0,06560 & -0,070019 \\ 0,01980 & 0,09336 & -0,01096 & 0,00436 \\ -0,06560 & 0,01096 & -0,02016 & -0,13354 \\ -0,07568 & -0,00460 & 0,13354 & 0,04283 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 160000 \\ 0 \\ 160000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .d2x \\ .d2y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix} = 3200 / 210000 \begin{pmatrix} 8034,51 \\ 14240,2 \\ -19612,4 \\ 6117,83 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 122,43 & \text{cm} \\ 216,993 & \text{cm} \\ -298,856 & \text{cm} \\ -93,2241 & \text{cm} \end{matrix}$$

ELEMEN 2

$$\{.\sigma\} = [D] [B] \{ d \}$$

$$[D] [B] = 210000 / 1164 \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 1164 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 6 & -24 & 6 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D] [B] = 210000 / 1164 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 6 & -24 & 6 & 24 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} .d1x \\ .d1y \\ .d4x \\ .d4y \\ .d3x \\ .d3y \end{Bmatrix}$$

$$.\sigma = 210000 / 1164 \begin{pmatrix} -2,1 & 0 & 2,1 & -3,6 & 0 & 3,6 \\ -0,9 & 0 & 0,9 & -8,4 & 0 & 8,4 \\ 0 & 6 & -24 & 6 & 24 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0,0000000 \\ 0,0000000 \\ 122,431 \\ 216,993 \\ -298,856 \\ 93,2241 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} .\sigma_x \\ .\sigma_y \\ .\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = 336,54 \begin{pmatrix} -188,4635204 \\ -929,4710005 \\ -880,8920952 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} -23784,5 \text{ Kg/Cm}^2 \\ -117301 \text{ Kg/Cm}^2 \\ -111170 \text{ Kg/Cm}^2 \end{Bmatrix}$$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A.KESIMPULAN

1. Memperkenalkan methoda Elemen Hingga pada balok beton tinggi (deep beam) dengan perbandingan antara tinggi(h) dan bentang (b) lebih dari 2/5 dan lebih dari 4/5 untuk balok menerus di atas dua tumpuan.

Dengan mengetahui methoda elemen, dapat digunakan menganalisa untuk mendapatkan besaran tegangan- tegangan yang terjadi pada balok beton tinggi yaitu :

- Balok deep beam dengan $b/h > 2/5$.

Elemen 1

$$\sigma_x = - 2223935,4928 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_y = - 518898,2578 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_{xy} = 18205,0027 \text{ Kg/Cm}^2$$

Elemen 2

$$\sigma_x = - 8919,172 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_y = - 43987,89 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_{xy} = -41688,85 \text{ Kg/Cm}^2$$

- Balok deep beam dengan $b/h > 4/5$.

Elemen 1

$$\sigma_x = -5921161 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_y = -1383729 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_{xy} = 48546,7 \text{ Kg/Cm}^2$$

Elemen 2

$$\sigma_x = -23784,5 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_y = -17301 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$\sigma_{xy} = -111170 \text{ Kg/Cm}^2$$

Adapun besaran tegangan- tegangan yang didapatkan baik pada $b/h > 2/5$ maupun $b/h > 4/5$ adalah sebagai berikut :

- Besaran tegangan yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 mempunyai besaran yang berbeda, tapi dengan bahan yang sama.
- Besaran tegangan dan sifat yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 mempunyai besaran dan sifat yang berbeda.

- 2 Mengidentifikasi **selisih** besaran tegangan yang terjadi dalam menganalisa penampang beton(balok) dengan methoda elemen hingga.

Adapun hasil selisih dari analisis struktur terjadinya deformasi yang besar adalah sebagai berikut :

- ELEMEN 1

$$.\sigma_x = (-2223935,4928) - (-5921161) = 5698767,507 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$.\sigma_y = (-518898,2578) - (-1383729) = 8648307422 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$.\sigma_{xy} = (18205,0027) - (48546,7) = -30341,6973 \text{ Kg/Cm}^2$$

- ELEMEN 2

$$.\sigma_x = (-8919,172) - (-23784,5) = 14865,328 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$.\sigma_y = (-43987,89) - (-17301) = -26686,89 \text{ Kg/Cm}^2$$

$$.\sigma_{xy} = (-41688,85) - (-111170) = 69841,15 \text{ Kg/Cm}^2$$

Tabel 5.1 Tegangan Balok Beton deep beam dengan $b/h > 2/5$.

No	Tegangan	Elemen 1 (Kg/Cm ²)	Elemen 2 (Kg/Cm ²)
1	$.\sigma_x$	-2223935,4928	-8919,172
		(tekan)	(tekan)
2	$.\sigma_y$	-518898,2578	-43987,89
		(tekan)	(tekan)
3	σ_{xy}	18205,0027	-41688,85

Tabel 5.2 Tegangan Balok Beton deep beam dengan $b/h > 4/5$.

No	Tegangan	Elemen 1 (Kg/Cm ²)	Elemen 2 (Kg/Cm ²)
1	σ_x	-597161,3141	-23784,5
2	σ_y	-1383728,6874	-117301
3	σ_{xy}	48546,6739	-111170

Tabel 5.3. Selisih Tegangan Balok Beton $B/H > 2/5$ dan $B/H > 4/5$ Elemen 1 dan Elemen 2

NO	TEGANGAN ELEMEN 1	B/H > 2/5 (Kg/Cm ²)	B/H > 4/5 (Kg/Cm ²)	SELISIH (Kg/Cm ²)
1	σ_x	-223935,4928	-597161,3141	373225,8213
2	σ_y	-518898,2578	-1383728,687	864830,4296
3	σ_{xy}	18205,00273	48546,67394	-30341,67122

NO	TEGANGAN ELEMEN 2	B/H > 2/5 (Kg/Cm ²)	B/H > 4/5 (Kg/Cm ²)	SELISIH (Kg/Cm ²)
1	σ_x	-8919,172012	-23784,4587	14865,28669
2	σ_y	-43987,88539	-117301,0277	73313,14232
3	σ_{xy}	-41688,85366	-111170,2764	69481,42277

B. SARAN

- 1 Besaran tegangan yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 mempunyai besaran yang berbeda, tapi dengan bahan yang berbeda perlu analisa lebih lanjut
- 2 Besaran tegangan dan sifat yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 mempunyai besaran dan sifat yang sama dapat dianalisa dengan menggunakan methoda elemen hingga berbasis Matlab.

DAFTAR PUSTAKA

- A Ghali, Neville, 1990, *Analisa struktur*, : Erlangga
- Alisjahbana. W. Sofia. 2016. *Metoda Elemen Hingga*. Yogyakarta : Teknosan
- Ashad Hanafi 2013. *Bahan Kuliah Analisa Struktur* : Makassar Universitas Muslim Indonesia
- Andy MK. Efendy 2017, *Analisa Model dan Sifat Struktur dengan Metoda Elemen Hingga* (Study Kasus Pembangunan Hotel Haris Bandung : Jurnal Fakultas Teknik Sipil Universitas Parahyangan Bandung
- Erwin Kreyszing, 1993, *advanced Engineering Mathemateics*, John Willey and Sons.
- Frank Ayres Jr., 1992, *Persamaan Tegangan dan Regangan* : Erlangga
- Fridha Auliya 2015. *Analisa Plastis pada Portal dengan Metoda Elemen Hingga*,: Thesis Fakultas Teknik Sipil Universitas Sumatera Utara Medan
- Hutahaeen Yohanes Chandra. 2015. *Metode Elemen Hingga*. Yogyakarta : Graha Ilmu
- Murrey R. Spiegel, 1986, *Analisa Elemen Hingga (dengan penerapan pada soal – soal nilai batas)*, Erlangga
- Moleong Lexy J. 2004. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung Remaja Rosdakarya
- Muhidin sirat. 2006. Metoda penelitian adalah suatu cara memilih masalah dan Penentuan judul penelitian
- Nasution. Amrinsyah. 2010. *Metoda Elemen Hingga*. Bandung : Institut Teknologi bandung
- Pinem . Daud.Mhd . 2010. *Analisa Struktur Dengan Metoda Elemen Hingga*. Bandung. Rekayasa Sains
- Rudolph Szilard., 1989, *Teori dan analisis Pelat* , Erlangga
- Ritz J George, 1994 . construction project Management, New York :Mc. Graw Hill
- Stephen Timonshenko, S. Wolnowsky Krieger, 1992 , *Teori pelat dan Cangkang* , Erlangga

- Soeharto Imam. 1999 *Manajemen Proyek* , Jakarta : PT. Gelora Aksara Pratama.
- Sugiyono. 2010. *Metoda Penelitian Pendidikan Pendekatan Kuantatif, Kualitatif Dan R & D*. Bandung : Alfabeta
- Santoso Mulyadi (2011) , *Analisa Tegangan Pada Portal Berlantai dengan Metoda Elemen Hingga (Study Kasus Pembangunan Gedung Kuliah FMIPA Universitas Negeri Manado)*, Jurnal Fakultas Teknik Sipil Universitas Sam Ratulangi Manado
- Servie O. Bapas (2011), *Aplikasi Metoda Elemen Hingga Pada Struktur Rangka Batang*, Thesis Universitas Sam Ratulangi Manado
- TM. Arief (2016), *Analisa Kekuatan Struktur Dengan Metoda Elemen Hingga (Study Kasus Pembangunan Gedung Work Shop PT. Baja Prima Inti Surabaya* , Jurnal Fakultas Teknik Sipil Universitas Airlangga Surabaya
- Wijaya. Usman . Tavio. 2018. *Desain Rekayasa Gempa Berbasis Kinerja* .Yogyakarta. Andi
- Winarno, Surakhmad. 2004, *Pengantar Penelitian Ilmiah, Dasar, Metoda dan Teknik*. Bandung: Tarsito