

PEMODELAN MATEMATIS DAN
PENYELESAIAN NUMERIS
DALAM **TEKNIK KIMIA**
DENGAN PEMROGRAMAN
BAHASA MATLAB

Wahyudi Budi Sediawan
Agus Prasetya
Takdir Syarif



GADJAH MADA UNIVERSITY PRESS

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberika segala fasilitas, kondisi dan kemampuan kepada penulis untuk menyelesaikan penulisan buku ini. Diharapkan buku ini bermanfaat bagi siapa saja yang berminat untuk meningkatkan kemampuannya dalam memformulasikan model matematis untuk mendiskripsikan fenomena-fenomena teknik kimia dan kemudian merancang langkah-langkah penyelesaian persamaaan-persamaan matematis yang terbentuk secara numeris, serta melaksanakan hitungan penyelesaian numeris tersebut dengan memanfaatkan komputer. Oleh karena itu buku ini pada esensinya berisi 3 hal pokok, yaitu:

1. Formulasi model matematis,
2. Perancangan langkah-langkah penyelesaian numeris (algoritma hitungan),
3. Pelaksanaan hitungan numeris berbantuan komputer.

Isi pokok 1 dan 2 pada prinsipnya sama dengan materi buku “Pemodelan Matematis dan Penyelesaian Numeris Dalam Teknik Kimia: Dengan Pemrograman Bahasa Basic dan FORTRAN” oleh Wahyudi Budi Sediawan dan Agus Prasetya, 1997, dengan sedikit perubahan redaksional dan koreksi pengetikan. Sedangkan isi pokok 3 relatif baru, karena pemrograman dan pelaksanaan hitungan dengan Bahasa Basic diganti dengan Bahasa Matlab yang saat ini meluas pemakaiannya. Ditunjukkan juga pelaksanaan hitungan numeris jika menggunakan *toolbox* yang ada di Matlab.

Menyadari adanya keterbatasan-keterbatasan penulis, apabila pembaca menemui kekurangan-kekurangan pada buku ini, penulis mohon maaf yang sebesar-besarnya. Penulis akan sangat menghargai segala input dari pembaca, yang tentunya sangat bermanfaat untuk penyempurnaan buku ini di masa mendatang, serta untuk penyempurnaan buku-buku lain yang diharapkan bisa dihasilkan penulis di kemudian hari.

Terima kasih juga penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah berkontribusi pada penyiapan buku ini. Secara khusus, terima kasih diucapkan kepada sejumlah mahasiswa Pascasarjana Teknik Kimia, Universitas Gadjah Mada, yang telah membantu penyiapan buku ini, yaitu Indah Hartati, Iqbal Syaichurrozi, Ajeng Septina Arlikah dan Jonas Kristanto.

Yogyakarta, Juni 2020

Wahyudi Budi Sediawan, Universitas Gadjah Mada

Agus Prasetya, Universitas Gadjah Mada

Takdir Syarif, Universitas Muslim Indonesia

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	xi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
BAB 2 <i>CHEMICAL ENGINEERING TOOLS</i>	7
2.1 Neraca Massa (<i>Material Balance</i>).....	7
2.2 Neraca Energi (<i>Energy Balance</i>).....	8
2.3 Kestimbangan (<i>Equilibrium</i>)	9
2.4 Proses-Proses Kecepatan (<i>Rate Processes</i>).....	11
BAB 3 PEMODELAN	19
3.1 Pencampuran dalam Tangki Secara <i>Batch</i> (Neraca Massa)	19
3.2 Penguapan Secara <i>Batch</i> (Neraca Massa dan Kestimbangan).....	21
3.3 Absorpsi Gas dengan Penggelembungan dalam Cairan (Neraca Massa dan Kestimbangan).....	22
3.4 Biodegradasi Zat Organik dalam Sungai (Neraca Massa, Kestimbangan dan Proses-Proses Kecepatan).....	24
3.5 Distribusi Suhu Batang di Udara (Neraca Panas dan Proses Kecepatan)	27
3.6 Difusi dan Reaksi Kimia dalam Katalisator Padat Berbentuk Bola Berpori (Neraca Massa dan Proses Kecepatan).....	29
3.7 Reaksi Homogen Fasa Cair dalam Tangki Berpengaduk yang Bekerja Secara <i>Batch</i> (Neraca Massa, Neraca Panas dan Proses Kecepatan).....	31

3.8	Menara Absorpsi Isotermis (Neraca Massa, Keseimbangan dan Proses Kecepatan).....	33
3.9	Reaksi Heterogen Cair-Cair dalam Tangki Berpengaduk (Neraca Massa, Keseimbangan dan Proses Kecepatan).....	35
3.10	Perpindahan Panas Konduksi <i>Unsteady State</i> Satu Arah dalam <i>Slab</i> (Neraca Panas dan Proses Kecepatan).....	37
3.11	Perpindahan Panas Konduksi <i>Unsteady State</i> 3 Arah pada Koordinat Cartesien dengan <i>Heat Generation</i> (Neraca Panas dan Proses Kecepatan).....	39
3.12	Perpindahan Panas Konduksi <i>Unsteady State</i> 3 Arah pada Koordinat Silinder dengan <i>Heat Generation</i> (Neraca Panas dan Proses Kecepatan).....	40
3.13	Perpindahan Massa dalam Aliran Laminer dalam Pipa (Neraca Massa, Keseimbangan, dan Proses Kecepatan).....	42
3.14	Adsorpsi Pada <i>Fixed Bed Column</i> (Neraca Massa, Keseimbangan, dan Proses Kecepatan).....	44
3.15	Ekstraksi Padat Cair dari Butir-Butir Berbentuk Bola (Neraca Massa, Keseimbangan, dan Proses Kecepatan).....	46
3.16	Pelarutan Butir-Butir Padatan dalam Tangki Berpengaduk yang Bekerja Adiabatis.....	49
3.17	Difusi dan Reaksi Kimia di Sekitar Silinder Panjang.....	50
3.18	Penguapan Butir Cairan Jatuh Bebas di Udara.....	52
3.19	Penguapan Cairan dalam Tabung Tegak.....	55
3.20	Degradasi Sulfida dalam Gas dengan Biofilm	59
BAB 4	PENYELESAIAN NUMERIS.....	65
4.1	Diferensiasi Numeris.....	65
4.2	Integrasi Numeris.....	67
4.3	Mencari Akar Persamaan Nonlinier	72
4.4	Optimasi Satu Variabel dengan Cara <i>Golden Section</i> ..	82
4.5	Optimasi Banyak Variabel dengan Cara <i>Hooke-Jeeves</i> ..	88
4.6	Penyelesaian Persamaan Linier Simultan.....	95
4.7	Evaluasi Tetapan dalam Persamaan Empiris	105
4.8	Penyelesaian Persamaan Diferensial Ordiner Jenis <i>Initial Value Problem</i>	127
4.9	<i>Finite Difference Approximation</i> untuk Persamaan Diferensial Ordiner	139

4.10	<i>Finite Difference Approximation</i> untuk Persamaan Diferensial Parsial.....	144
4.11	Penyelesaian Persamaan Nonlinier Simultan	158
BAB 5	APLIKASI PENDEKATAN MATEMATIS DALAM TEKNIK KIMIA: PEMODELAN DAN PENYELESAIAN NUMERIS	165
5.1	Pengaliran Fluida Antara Dua Tangki dengan Pompa (Metode <i>Newton-Raphson</i>).....	165
5.2	Waktu Pengaliran Antara Dua Tangki dengan Pompa (Kombinasi Antara Integrasi Cara Simpson dan Metode <i>Newton-Raphson</i>).....	172
5.3	Optimasi Suhu Masuk Reaktor Adiabatis, Reaksi Bolak-Balik Eksotermis (Kombinasi Golden-Section dan Simpson's Rule)	179
5.4	Integrasi Menggunakan Pendekatan Polinomial.....	190
5.5	Reaktor Tabung Nonadibatis Nonisotermis (Penyelesaian PD Ordiner Simultan dengan Cara Runge-Kutta dan <i>Predictor-Corrector</i>)	193
5.6	Distribusi Suhu pada <i>Circular Fin</i> (<i>Finite Difference Approximation</i> untuk Penyelesaian PD Ordiner).....	201
5.7	Pengeringan Silinder (<i>Finite Difference Approximation</i> untuk Penyelesaian PD Parsial).....	207
5.8	Evaluasi Tetapan Tunggal dalam Model Matematis dengan Kuadrat Terkecil Numeris (Kombinasi antara <i>Golden-Section</i> dan <i>Finite Difference Approximation</i>) .	215
5.9	Evaluasi Kinetika Reaksi Berdasarkan Data Reaktor <i>Batch</i> Adiabatis (Kombinasi Hooke-Jeeves dan Simpson).....	224
5.10	<i>Desuperheater</i> dengan Kontak Langsung	238
5.11	Reaktor Tabung dengan Deaktivasi Katalisator (Kombinasi Runge-Kutta dan Cara Eksplisit).....	252
5.12	Reaksi Gas-Cair dalam Tangki Berpengaduk.....	267
5.13	Ekstraksi dari Padatan Berbentuk <i>Slab</i> dalam Tangki Berpengaduk	285
5.14	Ekstraksi Padat-Cair dalam Kolom <i>Fixed Bed</i>	306
BAB 6	SOAL-SOAL LATIHAN.....	316
BAB 7	CONTOH-CONTOH PROGRAM DALAM BAHASA FORTRAN.....	382
7.1	Diferensiasi Numeris.....	382
7.2	Integrasi Numeris Cara Trapezoidal.....	383

7.3	Integrasi Numeris Cara Simpson	385
7.4	<i>Bisection</i>	386
7.5	<i>Newton-Raphson</i> dengan Diferensiasi Analitis.....	389
7.6	<i>Newton-Raphson</i> dengan Diferensiasi Numeris	390
7.7	Optimasi dengan <i>Golden-Section</i>	392
7.8	Optimasi dengan Hooke-Jeeves	395
7.9	Persamaan Linier	399
7.10	Regresi Polinomial	401
7.11	Runge-Kutta.....	405
7.12	<i>Finite Difference Approximation</i> untuk Persamaan Diferensial Ordiner	407
7.13	<i>Finite Difference Approximation</i> untuk Persamaan Diferensial Parsial Cara Implisit	410
7.14	Penyelesaian Persamaan Nonlinier Simultan	414
DAFTAR PUSTAKA.....		419
INDEKS		421
TENTANG PENULIS.....		427

BAB 1. PENDAHULUAN

Dewasa ini ilmu dan teknologi berkembang sangat pesat, termasuk juga bidang teknik kimia. Alat-alat dan proses-proses dalam industri kimiapun selalu berubah/disempurnakan. Meski demikian, prinsip-prinsip fundamental yang mendasari alat-alat/proses-proses tersebut tidak banyak berubah. Untuk menyesuaikan dengan keadaan tersebut, maka pada pendidikan teknik kimia sebaiknya subjek-subjek yang bersifat *centered around devices* digeser ke subjek-subjek yang bersifat *centered around physical principles and mathematical techniques*. Pendidikan yang lebih bersifat *centered around devices* akan membutuhkan banyak waktu dan ilmu yang dikuasai akan cepat *out of date*. Sebaliknya pendidikan yang bersifat *centered around physical principles and mathematical techniques* akan menghasilkan sarjana teknik kimia yang siap menyesuaikan diri dengan alat dan proses yang baru. Lagi pula subjek-subjeknya akan lebih mungkin untuk diberikan di bangku kuliah dalam waktu yang terbatas. Sarjana yang dihasilkan memang tidak siap pakai, tapi siap untuk berkembang. Jelas tentunya bahwa sarjana dituntut untuk selalu berlatih dan meningkatkan diri setelah bekerja.

Perlu untuk dikemukakan di sini bahwa pendidikan yang lebih menekankan pada konsep-konsep fundamental tidaklah berarti kuno/ketinggalan jaman. Justru penekanan pada konsep-konsep fundamental ini merupakan corak dari pendidikan teknik kimia modern, seperti di negara-negara maju, misalnya Amerika Serikat.

Meskipun pendidikan teknik kimia ditekankan pada konsep-konsep fundamental yang relatif tidak berubah, tetapi tidaklah berarti bahwa pendidikannya bersifat statis. *Updating* perlu selalu dilakukan dalam hal penerapan konsep-konsep fundamental tersebut dalam menganalisis alat dan proses. Model-model matematis maupun metode-metode perhitungan yang barupun perlu selalu diikuti. Dengan penguasaan konsep-konsep fundamental yang cukup mantap, *updating* tidaklah sulit untuk dijalankan.

Selain itu, pendidikan yang menekankan pada konsep-konsep fundamental juga melatih mahasiswa untuk berpikir lebih mendalam dan logis. Hal ini akan meningkatkan kemampuan penalarannya, sehingga dalam menghadapi masalah-masalah non-teknik-

kimia pun, sarjana teknik kimia yang dihasilkan akan dapat menganalisis dan memecahkannya dengan baik.

Dalam bidang teknik kimia, konsep-konsep fundamental tersebut, yang sering disebut *chemical engineering tools*, adalah:

1. Neraca massa (*material balance*),
2. Neraca energi (*energy balance*),
3. Keseimbangan (*equilibrium*),
4. Proses-proses kecepatan (*rate processes*), baik yang bersifat fisis (perpindahan momentum, perpindahan energi, dan perpindahan massa) maupun yang bersifat kimiawi (kinetika kimia),
5. Ekonomi,
6. Humanitas.

Nomor 1 sampai 4 bersifat teknis, sedangkan nomor 5 dan nomor 6 bersifat non teknis. Dengan penguasaan yang mantap terhadap *chemical engineering tools* di atas maka sarjana teknik kimia diharapkan akan dapat melaksanakan tugasnya dengan baik. Bagi seorang yang memegang jabatan manajerial, *tools* nomor 5 dan 6 akan berperan lebih menonjol sedangkan bagi yang bekerja sebagai tenaga profesional, *tools* nomor 1 sampai 4 lebih banyak digunakan.

Di masa mendatang, jumlah institusi pendidikan teknik kimia akan semakin banyak, sehingga jumlah sarjana teknik kimia yang dihasilkan akan makin banyak. Karena tenaga-tenaga yang dibutuhkan untuk jabatan manajerial tidak begitu banyak (mengikuti sistem hierarki piramida), dimasa mendatang sebagian besar sarjana teknik kimia akan bekerja sebagai tenaga profesional sehingga mereka akan lebih banyak bekerja dengan ilmu yang bersifat teknis sehingga *tools* nomor 1 sampai 4 akan lebih banyak berperan.

Pada pendidikan dengan konsep-konsep fundamental, mahasiswa tidak dilatih untuk mempelajari kasus demi kasus dari alat-alat/proses-proses teknik kimia, tetapi dilatih untuk mengaplikasikan *chemical engineering tools* pada alat-alat/proses-proses teknik kimia. Kemampuan untuk “menghidupkan” ilmu-ilmu yang mati dalam rangka memecahkan problem-problem dunia nyata sangat esensial bagi sarjana teknik kimia. Ilmu-ilmu tersebut diharapkan bisa menjadi bagian dari diri sendiri (transendental). Ibaratnya, pengendara sepeda motor yang kompeten sudah merasa bahwa motor yang

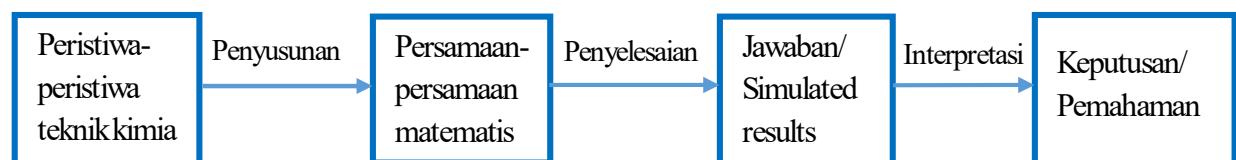
dikendarainya adalah seperti bagian dari tubuhnya sendiri. Untuk mencapai penguasaan tersebut diperlukan pembelajaran, pengalaman dan latihan dengan penuh kecintaan.

Pendidikan teknik kimia juga perlu memberikan pengertian kepada para mahasiswa bahwa sarjana teknik kimia (*chemical engineer*) itu berbeda dengan ilmuwan (*scientist*), antara lain dalam hal bahwa jika seorang ilmuwan lebih banyak berusaha menjawab pertanyaan “mengapa”, sarjana teknik kimia lebih mementingkan jawaban pertanyaan “bagaimana” dan pertanyaan tersebut perlu dijawab secara kuantitatif atau semi kuantitatif. Ilmuwan berusaha mencari “kebenaran”, sedang sarjana teknik berusaha menentukan “tindakan”.

Perlu pula disadari bahwa disiplin ilmu teknik kimia merupakan satu kesatuan. Pembagiannya menjadi berbagai mata kuliah hanya dimaksudkan agar lebih mudah dipelajari. Untuk menyelesaikan problem-problem teknik kimia diperlukan pendekatan terpadu, dimana hal-hal yang dipelajari dalam berbagai mata kuliah dipakai bersama-sama. Oleh karena itu, sarjana teknik kimia perlu menguasai disiplin ilmu teknik kimia secara integral, bukan hanya satu atau beberapa bagian saja.

Kini peran matematika dalam penyelesaian problem-problem teknik kimia semakin besar. Hal ini antara lain disebabkan ketersediaan komputer yang makin lama makin canggih dan murah. Dengan komputer, hitungan-hitungan yang dulu dianggap tidak *feasible* sekarang menjadi *feasible*. Bahkan kiranya cukup beralasan apabila saat ini bagi bidang teknik kimia matematika dianggap sebagai bahasa (*language*). Banyak sekali peristiwa yang didekati/diekspresikan dengan persamaan-persamaan matematis (model matematis).

Pendekatan matematis umumnya melalui tiga tahapan pokok (Mickley, 1957), yaitu (Gambar1.1):



Gambar 1.1 *Langkah-langkah pendekatan matematis*

1. Menyusun persamaan-persamaan matematis yang dapat mendekati peristiwa yang ditinjau (pemodelan atau *modeling*),
2. Menyelesaikan persamaan-persamaan matematis yang tersusun tersebut (penyelesaian),
3. Interpretasi jawaban persamaan matematis yang diperoleh untuk dipakai sebagai dasar pengambilan keputusan atau untuk mendapatkan pemahaman yang lebih mendalam atas peristiwa yang ditinjau.

Tahap pertama memerlukan penguasaan konsep-konsep fundamental terkait peristiwa yang ditinjau, pemahaman atas konsep-konsep matematika, kemampuan imajinasi, dan kemampuan menyederhanakan/mengabaikan (asumsi-asumsi). Dengan adanya asumsi-asumsi tersebut maka model matematis tidak bersifat “satu jawaban”. Adanya asumsi-asumsi yang berbeda menyebabkan pendekatan matematis bersifat “*open ended*”. Tentunya jawaban yang dicari adalah yang cukup dekat dengan peristiwa sebenarnya, tetapi tidak terlalu sulit penyelesaiannya. Dalam teknik kimia, konsep-konsep fundamental yang banyak dipakai tercakup dalam *chemical engineering tools* nomor 1 sampai dengan 4 dan ini akan dibahas secara ringkas dalam Bab 2.

Tahap kedua dapat dijalankan secara analitis ataupun numeris. Cara analitis memberikan jawaban eksak, akan tetapi memerlukan kemampuan yang tinggi dalam memanipulasi matematik dan terbatas hanya untuk model matematis sederhana, sehingga hanya dapat menyelesaikan sebagian kecil masalah teknik kimia. Cara numeris hanya memberikan jawaban pendekatan, tetapi tidak memerlukan kemampuan manipulasi matematik yang terlalu tinggi, dan dapat memecahkan lebih banyak masalah teknik kimia. Salah satu kendala pemakaian cara numeris di masa lampau adalah bahwa cara ini memerlukan jumlah hitungan yang sangat banyak sehingga dipandang tidak *feasible*. Dengan adanya komputer yang semakin canggih dan murah, kelemahan ini dapat diatasi sehingga cara numeris dewasa ini lebih banyak dipakai.

Perlu ditambahkan bahwa meskipun penyelesaian numeris ini tidak 100% benar (hanya mendekati), tetapi untuk bidang teknik kimia umumnya cukup baik, karena jawaban yang dicari bukan yang benar, tetapi jawaban yang bisa dipakai (*useful*).

Tahap ketiga memerlukan kemampuan penalaran dan imajinasi untuk mendapatkan arti fisis dari jawaban matematis, yang dapat dimanfaatkan untuk dasar

pengambilan keputusan teknis atau untuk pemahaman lebih mendalam atas fenomena yang dipelajari. Selain itu, langkah ini juga dapat dipakai untuk mengevaluasi apakah model matematika (persamaan matematis) yang diimajinasikan cocok atau tidak dengan fenomena yang ditinjau. Pengujian dapat dijalankan dengan membandingkan jawaban matematis dengan data pengamatan riil (uji korespondensi) atau menguji konsistensi jawaban matematis dengan logika dan konsep-konsep lain yang terkait (uji konsistensi) atau dengan melihat apakah jawaban matematis tersebut dapat dimanfaatkan untuk dijadikan dasar pengambilan keputusan teknis (uji kemanfaatan).

Dengan perkembangan tersebut maka dalam aplikasi matematika teknik kimia, pemahaman atas pengertian konsep-konsep matematika sangat diperlukan dan dipandang lebih penting daripada kemampuan manipulasi matematika analitis yang terlalu *advanced*. Di samping itu, penyelesaian numeris dan pemrograman komputer perlu dikuasai dengan baik. Familierisasi *software* komputer juga sangat bermanfaat.

Simulasi komputer, yang dimaksud di sini adalah menyusun model matematis untuk peristiwa yang disimulasikan dan kemudian menyelesaikan model matematis tersebut secara numeris dengan bantuan komputer, banyak dipakai dalam teknik kimia, misalnya untuk penelitian, perancangan, dan optimasi. Simulasi komputer juga dapat mengurangi model fisik yang perlu dibuat. Oleh karena itu, kemampuan simulasi komputer dan pemanfaatannya perlu dilatih dalam pendidikan teknik kimia.

Dalam praktik teknik kimia, problem dengan informasi yang kurang mencukupi atau data yang tidak konsisten sering kali dijumpai. Oleh karena itu pendidikan teknik kimia juga perlu berusaha menanamkan sikap bersedia bekerja dengan data yang kurang dan tidak konsisten kepada para mahasiswa. Sejalan dengan itu, sikap mental *questioning attitude toward every information, data, methods and results* perlu dimiliki oleh sarjana teknik kimia.

Selain itu, karena dalam kegiatan-kegiatan teknik kimia orang selalu berlomba dengan waktu, misalnya agar jangan sampai mendirikan pabrik yang sudah tua saat dilahirkan, maka para mahasiswa perlu dilatih untuk bekerja dengan cepat dan menghargai waktu. Kebiasaan menunda-nunda pekerjaan perlu dihilangkan.

Dalam kehidupan masyarakat Indonesia khususnya, dan dunia umumnya, orang perlu bertindak/bersikap sesuai dengan etika yang berlaku. Oleh karena itu pendidikan

juga perlu menanamkan etika. Sarjana teknik kimia akan bisa lebih banyak berkontribusi kepada masyarakat bila ia mempunyai etika yang baik.

Dalam buku ini, penyusun membahas pemodelan dan penyelesaian numeris dalam teknik kimia yang sangat diperlukan sarjana teknik kimia saat ini. Di samping itu, karena begitu pentingnya peran komputer dalam penyelesaian numeris, maka buku ini juga memberikan tuntunan dalam pembuatan program-program komputer yang diperlukan, dalam bahasa MATLAB dan FORTRAN.

Buku ini dimaksudkan untuk mahasiswa S-1 atau siapa saja yang berminat. Dengan mempelajari buku ini secara sungguh-sungguh dan berurutan, seorang pemula pun diharapkan akan dapat meningkatkan kemampuannya dalam pemodelan, penyelesaian numeris, dan sekaligus pemrograman komputer sampai tingkat yang cukup mantap untuk diaplikasikan. Penguasaan terhadap hal-hal yang dibahas dalam buku ini diharapkan pula akan dapat mempermudah proses belajar ilmu-ilmu terkait teknik kimia yang lain.

BAB 2. CHEMICAL ENGINEERING TOOLS

Teori-teori/konsep-konsep dasar (*fundamental*) yang selalu dipakai dalam penyusunan persamaan-persamaan matematis dibidang teknik kimia tercakup dalam *Chemical Engineering Tools*, yaitu:

1. Neraca massa (*Material Balance*),
2. Neraca energi (*Energy Balance*),
3. Keseimbangan (*Equilibrium*),
4. Proses-proses kecepatan (*Rate Processes*), yang meliputi proses-proses fisis yakni proses transfer atau *transport phenomena* (perpindahan momentum, perpindahan energi, dan perpindahan massa) serta proses-proses kimiawi (kinetika kimia),
5. Ekonomi,
6. Humanitas.

Dalam praktik penyusunan persamaan-persamaan matematis, *tools* nomor 1 sampai 4 adalah yang paling sering digunakan.

1. Neraca Massa (*Material Balance*)

Penyusunan neraca massa didasarkan pada hukum kekekalan massa yang berbunyi: "Massa itu kekal (tak dapat dimusnahkan dan tak dapat diciptakan)"

Bentuk yang lebih operasional dalam teknik kimia dari hukum kekekalan massa adalah:

$$\text{Input} - \text{Output} = \text{Accumulation} \quad (2.1)$$

Bisa juga bentuk tersebut dinyatakan dalam tiap satuan waktu (*rate*), yaitu:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) berlaku untuk massa total.

Bila massa terdiri dari banyak komponen (kimia, fasa, ukuran, dan lain-lain), dan tidak ada perubahan dari satu komponen menjadi komponen lain (misal reaksi kimia), maka massa masing-masing komponen juga tetap, sehingga dapat disusun neraca massa komponen dalam bentuk seperti persamaan (2.1) dan (2.2). Untuk sistem dengan n komponen massa dapat disusun persamaan neraca massa (neraca massa total dan komponen). Misal ada 3 komponen massa, yaitu A, B, C, maka dapat disusun misalnya neraca massa total, neraca massa A, neraca massa B, sedangkan neraca massa C tidak

perlu disusun, karena tidak bermanfaat (sudah tercakup pada persamaan-persamaan neraca massa lainnya).

Jika massa terdiri dari banyak komponen dan ada perubahan suatu komponen menjadi komponen lain, maka bentuk persamaan neraca massa total tetap {persamaan (2.1) atau (2.2)} tetapi persamaan neraca massa komponen perlu dikoreksi menjadi sebagai berikut (misal neraca massa komponen A):

$$\begin{aligned} \text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} + \text{Rate of Formation} - \\ \text{Rate of Dissapearance} = \text{Rate of Accumulation} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pada keadaan *steady state* (tidak dipengaruhi waktu), akumulasi = 0, karena kalau ada akumulasi, pasti ada perubahan terhadap waktu.

2. Neraca Energi (*Energy Balance*)

Hukum dasarnya adalah hukum kekekalan energi. Salah satu bentuk yang lebih operasional dalam teknik kimia adalah seperti pada neraca massa {persamaan (2.1) atau (2.2)}. Bentuk- bentuk yang lain juga ada, misal pada termodinamika, mekanika fluida, dan lain-lain.

3. Kestimbangan (*Equilibrium*)

Dalam teknik kimia, dua jenis kestimbangan yang penting adalah kestimbangan fasa (fisis) dan kestimbangan kimia.

a. Kestimbangan Fasa

Fasa I y
Fasa II x

Pada keadaan setimbang ada persamaan matematis yang menghubungkan komposisi suatu fasa dengan komposisi fasa lain.

Gambar 2.1 *Kestimbangan fasa*

Misalnya pada kestimbangan fasa uap-cair, terdapat pendekatan Raoult-Dalton:

$$y = \frac{\alpha x}{1+(\alpha-1)x} \quad (2.4)$$

atau pendekatan Henry:

$$y = H \cdot x \quad (2.5)$$

Termodinamika modern menyediakan persamaan-persamaan kesetimbangan fasa yang lebih akurat. Bentuk-bentuk persamaan tersebut biasanya cukup rumit. Tetapi, dengan bantuan komputer, pemakaian persamaan-persamaan yang rumit tersebut dimungkinkan.

Hukum dasar kesetimbangan yang umum dipakai adalah:

$$f_i^{II} = f_i^I \quad (2.6)$$

dengan f_i adalah fugasitas komponen i .

Misal ditinjau kesetimbangan uap-cair. Jika dipakai pendekatan koefisien fugasitas (ϕ_i) untuk fasa uap (I) dan koefisien aktivitas (γ_i) untuk fasa cair (II), maka diperoleh bentuk:

$$\gamma_i \cdot x_i \cdot f_i^o = \phi_i \cdot y_i \cdot P \quad (2.7)$$

dengan:

f_i^o = fugasitas komponen murni i pada keadaan fasa seperti fasa II (cair) dan keadaan standar

P = tekanan total.

Dalam hal ini,

$$\gamma_i = f(x_1, x_2, \dots, x_N, T, P) \quad (2.8)$$

$$\phi_i = f(y_1, y_2, \dots, y_N, T, P) \quad (2.9)$$

dengan T adalah suhu mutlak.

Jika tekanan sistem rendah dan tekanan uap murni i juga rendah, maka f_i^o dapat didekati dengan tekanan uap murni i (P_i^S), sehingga:

$$\gamma_i \cdot x_i \cdot P_i^S = \phi_i \cdot y_i \cdot P \quad (2.10)$$

Jika fasa uap ideal ($\phi_i = 1$) dan fasa cair juga ideal ($\gamma_i = 1$) maka diperoleh hukum Raoult-Dalton:

$$x_i \cdot P_i^S = y_i \cdot P \quad (2.11)$$

Untuk sistem biner, persamaan (2.11) dapat dinyatakan dalam bentuk seperti persamaan (2.4).

b. Kestimbangan Kimia

Misal ada reaksi setimbang:



Dalam keadaan setimbang, ada persamaan matematis yang menghubungkan konsentrasi komponen satu dengan lainnya dalam satu fasa, berbentuk misalnya:

$$K = \frac{(C_C)^l}{(C_A)^m (C_B)^n} \quad (2.13)$$

4. Proses-proses Kecepatan (*Rate Processes*)

a. *Transport Phenomena*

Transfer phenomena terdiri dari transfer momentum, transfer energi ($\approx$ panas) dan transfer massa.

a.1 Transfer Momentum

Kecepatan transfer momentum secara molekuler tergantung pada sifat fluida dan gradien kecepatan, dan secara sistematis dapat dinyatakan sebagai:

$$\tau_{yx} = f(\text{sifat fluida}, \frac{d\vartheta_x}{dy}) \quad (2.14)$$

dengan:

τ_{yx} = kecepatan transfer arah y dari momentum arah x, tiap satuan waktu, tiap satuan luas

= tegangan geser (gaya/luas)

ϑ_x = kecepatan arah x

y = jarak.

Untuk fluida Newton, persamaan (2.14) berbentuk:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{d\vartheta_x}{dy} \quad (2.15)$$

dengan μ adalah viskositas fluida.

a.2 Transfer Panas

Dalam buku ini dibahas tiga proses perpindahan panas, yaitu konduksi, antar fasa, dan tahanan seri. Perpindahan panas konduksi adalah perpindahan panas yang tidak disebabkan gerak makroskopis medianya, tetapi disebabkan oleh gerak molekuler medianya. Hukum yang banyak dipakai untuk analisis konduksi adalah hukum Fourier:

$$Q = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (2.16)$$

atau

$$q = -k \cdot \frac{dT}{dx} \quad (2.17)$$

dengan:

Q = Transfer panas tiap satuan waktu

q = Transfer panas tiap satuan waktu tiap satuan luas

A = Luas permukaan transfer

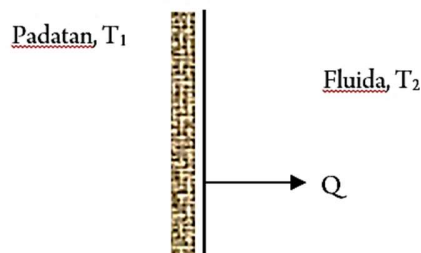
T = Suhu

x = Jarak (posisi)

k = Konduktivitas panas.

Harga k bisa tetap, bisa dipengaruhi suhu, arah dan lain-lain.

Perpindahan panas antar fasa misalnya terjadi antara permukaan padatan dengan fluida di dekatnya (Gambar 2.2.).



Gambar 2.2. *Perpindahan panas dari permukaan padatan (suhu T_1) ke fluida (suhu T_2)*

Hukum Newton menyatakan bahwa:

$$Q = -h \cdot A \cdot (T_2 - T_1) = h \cdot A \cdot (T_1 - T_2) \quad (2.18)$$

dengan:

Q = Transfer panas tiap satuan waktu

A = Luas permukaan transfer

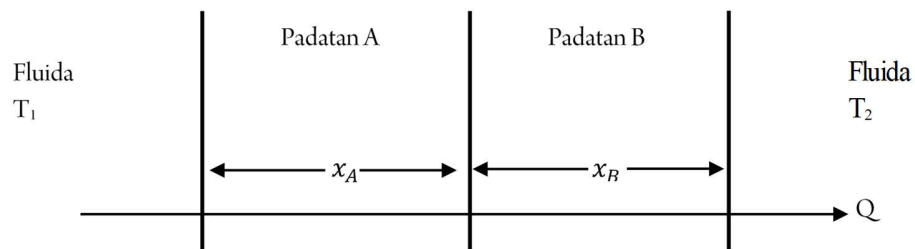
k = Koefisien perpindahan panas

Dalam hal ini dibayangkan ada suatu lapisan film fluida pada permukaan padatan yang mengontrol perpindahan panas dari permukaan ke fluida. Jika luas permukaan sukar dievaluasi, maka persamaan (2.18) diubah dalam bentuk:

$$Q = -\text{volum} \cdot h \cdot a \cdot (T_2 - T_1) \quad (2.19)$$

dimana a = luas per satuan volum. Dalam hal ini, $h \cdot a$ dianggap sebagai satu kesatuan (koefisien perpindahan panas volumetrik).

Contoh perpindahan panas melalui tahanan seri ditunjukkan pada Gambar 2.3. Untuk berpindah dari fluida 1 ke fluida 2, panas harus berturut-turut bergerak melalui film fluida pada permukaan kiri (h_1), padatan A (konduksi), padatan B (konduksi), dan film fluida pada permukaan kanan (h_2).



Gambar 2.3. *Perpindahan panas melalui tahanan seri*

Kecepatan perpindahan panas melalui tahanan seri pada Gambar 2.3, pada keadaan *steady state* mengikuti persamaan:

$$Q = -U \cdot A \cdot (T_2 - T_1) = U \cdot A \cdot (T_1 - T_2) \quad (2.20)$$

dengan:

U = Koefisien perpindahan panas gabungan.

Dalam hal ini:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{x_A}{k_A} + \frac{x_B}{k_B} + \frac{1}{h_2} \quad (2.21)$$

Jika konduktivitas panas padatan sangat besar (k_A, k_B sangat besar), maka persamaan (2.21) berubah menjadi:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \quad (2.22)$$

Jika luas permukaan 1 dan 2 tidak sama besar, misal pada pipa penukar panas, maka dalam penggabungan diperlukan koreksi luas. Misal pada alat penukar panas:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_o} + \frac{1}{h_{io}} \quad (2.23)$$

Dalam hal ini:

$$h_{io} = h_i \cdot \frac{A_i}{A_o} \quad (2.24)$$

dengan A_i dan A_o masing-masing adalah luas permukaan dalam dan permukaan luar.

Untuk kasus-kasus dimana harga A sulit dievaluasi, maka dapat dipakai bentuk persamaan:

$$Q = -\text{volum} \cdot U \cdot a \cdot (T_2 - T_1) \quad (2.25)$$

dengan $U \cdot a$ dianggap sebagai satu kesatuan ($a = \text{luas/volum}$).

a.3 Transfer Massa

Yang dibahas dalam buku ini adalah perpindahan massa secara difusi (dalam satu fasa), antar fasa satu film dan antar fasa dua film.

Perpindahan massa A dalam medium B (difusi) didekati dengan hukum Fick:

$$N_A = (N_A + N_B) \cdot x_A - c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dz} \quad (2.26)$$

dengan

N_A = Transfer massa A tiap satuan waktu tiap satuan luas

N_B = Transfer massa B tiap satuan waktu tiap satuan luas

x_A = Fraksi mol A

c = Konsentrasi total (A+B)

D_{AB} = Difusivitas A melalui B

z = Jarak (posisi).

Untuk difusi ekimolar (laju A dan laju B sama) arus berlawanan $N_A = -N_B$, sehingga persamaan (2.26) berubah menjadi:

$$N_A = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dz} \quad (2.27)$$

Untuk difusi A melalui media B yang diam, $N_B = 0$, sehingga persamaan (2.26) berubah menjadi

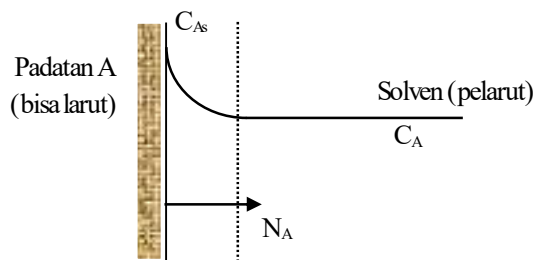
$$N_A = - \frac{c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dz}}{(1-x_A)} \quad (2.28)$$

Untuk konsentrasi A yang kecil, maka x_A mendekati 0 dan c praktis tetap, sehingga:

$$N_A = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dz} = -D_{AB} \cdot \frac{d(c \cdot x_A)}{dz} \quad (2.29)$$

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} \quad (2.30)$$

Perpindahan fasa antar fasa satu film misalnya adalah antara padatan dengan cairan, atau padatan dengan gas (Gambar 2.4).



Gambar 2.4. *Transfer massa antar fasa satu film*

Persamaan pendekatan makroskopis untuk peristiwa ini adalah:

$$N_A = k_c (C_{As} - C_A) \quad (2.31)$$

dengan

N_A = Transfer massa A tiap satuan waktu tiap satuan luas

C_{As} = Konsentrasi jenuh A di larutan

C_A = Konsentrasi A di larutan

k_c = Koefisien transfer massa

Bentuk lain dari persamaan (2.31) adalah:

$$N_A = k_y (x_{As} - x_A) \quad (2.32)$$

$$N_A = k_y (y_{As} - y_A) \quad (2.33)$$

$$N_A = k_G (P_{As} - P_A) \quad (2.34)$$

Dalam hal ini:

y_A = Fraksi mol A

P_A = Tekanan parsial A

Bila luas permukaan sulit untuk dievaluasi, maka dapat dipakai persamaan:

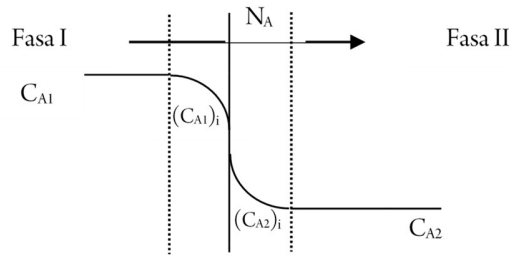
$$N_{Av} \left(\frac{\text{massa}}{\text{waktu} \times \text{volume}} \right) = k_c a (C_{As} - C_A) \quad (2.35)$$

dengan

a = Luas persatuan volum

$k_c a$ = Koefisien perpindahan massa volumetrik.

Perpindahan massa antar fasa dua film misalnya terjadi pada batas fasa cair-gas, atau cair-cair tidak bercampur (*immiscible*) dimana gradien konsentrasinya seperti pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5. *Transfer massa antar fasa dua film*

Dengan asumsi bahwa tak ada akumulasi A pada film-film, $(C_{A1})_i$ setimbang dengan $(C_{A2})_i$ dan hubungan kesetimbangannya mengikuti hukum Henry:

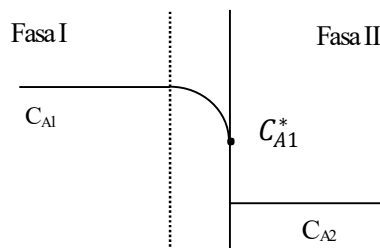
$$(C_{A2})_i = H \cdot (C_{A1})_i \quad (2.36)$$

maka kecepatan transfer massa A dari fasa 1 ke fasa 2 dapat didekati dengan:

$$N_A = k_{c1}(C_{A1} - (C_{A1})_i) = k_{c2}((C_{A2})_i - C_{A2}) \quad (2.37)$$

Persamaan (2.37) sukar dipakai, karena $(C_{A1})_i$ dan $(C_{A2})_i$ sukar dievaluasi. Lalu dua film tersebut dibayangkan dapat diwakili oleh satu film yang merupakan gabungan dua film. Film gabungan dapat dianggap terjadi di fasa 1 ataupun 2.

Jika film gabungan dianggap terjadi di fasa 1 maka gradien konsentrasi A dapat didekati seperti pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6. *Film gabungan di fasa 1*

Dalam hal ini C_{A1}^* setimbang dengan C_{A2} sehingga:

$$C_{A2} = H \cdot C_{A1}^* \quad (2.38)$$

Dengan pendekatan tersebut, maka persamaan (2.37) dapat didekati dengan

$$N_A = K_{c1}(C_{A1} - C_{A1}^*) \quad (2.39)$$

dengan K_{c1} = koefisien perpindahan massa gabungan di fasa 1.

Harga K_{c1} dapat dievaluasi dengan manipulasi matematis berikut:

$$(C_{A1} - C_{A1}^*) = (C_{A1} - (C_{A1})_i) + ((C_{A1})_i - C_{A1}^*) \quad (2.40)$$

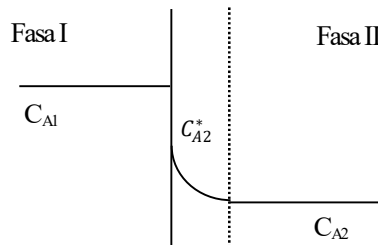
$$(C_{A1} - C_{A1}^*) = (C_{A1} - (C_{A1})_i) + \frac{1}{H} ((C_{A2})_i - C_{A2}) \quad (2.41)$$

$$\frac{N_A}{K_{c1}} = \frac{N_A}{k_{c1}} + \frac{1}{H} \frac{N_A}{k_{c2}} \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{K_{c1}} = \frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{H \cdot k_{c2}} \quad (2.43)$$

Jadi persamaan perpindahan massa yang lebih mudah dipakai adalah persamaan (2.39) dengan K_{c1} diperoleh dengan persamaan (2.43).

Jika film gabungan dianggap terjadi di fasa 2, maka gradien konsentrasi A adalah seperti pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7. Film gabungan di fasa 2

Dengan cara yang sama diperoleh

$$N_A = K_{c2}(C_{A2}^* - C_{A2}) \quad (2.44)$$

$$C_{A2}^* = H \cdot C_{A1} \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{K_{c2}} = \frac{H}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{c2}} \quad (2.46)$$

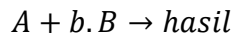
Analog dengan transfer massa satu film, maka bentuk kecepatan panas volumetric dimungkinkan, yaitu berbentuk:

$$N_{Av} \left(\frac{\text{massa}}{\text{waktu} \times \text{volum}} \right) = K_{c1} a (C_{A1} - C_{A1}^*) = K_{c2} a (C_{A2}^* - C_{A2}) \quad (2.47)$$

dengan $K_{c1}a$ dan $K_{c2}a$ adalah koefisien perpindahan massa volumetris.

b. Kinetika Kimia

Bentuk persamaan kecepatan reaksi bermacam-macam. Bentuk yang paling sederhana, misalnya untuk reaksi homogen sederhana:



adalah

$$r_A = k.C_A^m.C_B^n \quad (2.48)$$

dengan:

r_A = Massa A bereaksi tiap satuan waktu, tiap satuan volum

k = Tetapan kecepatan reaksi yang nilainya tergantung suhu (persamaan Arrhenius)

m, n = Order reaksi.

Catatan:

Pembahasan lebih detail mengenai *chemical engineering tools* dapat dibaca pada buku-buku teknik kimia dasar, misalnya Prausnitz (1986) untuk kesetimbangan fasa, Brown (1978), Foust (1980), Welty (1984) untuk *Transport Phenomena*, Smith (1981), Levenspiel (1972) untuk kinetika kimia.

BAB 3. PEMODELAN

Dalam bab ini ditunjukkan contoh-contoh penyusunan (formulasi) persamaan matematis (model matematis) untuk mendekati peristiwa-peristiwa teknik kimia (pemodelan) yang disusun berdasarkan *chemical engineering tools*. Perlu diingat bahwa untuk suatu peristiwa dapat disusun model matematis yang berbeda, tergantung pada penyederhanaan-penyederhanaan yang dipakai (asumsi-asumsi). Pemodelan memang bersifat *open-ended*. Model matematis yang diinginkan tentunya yang tidak terlalu rumit tetapi cukup mendekati peristiwa sebenarnya. Akan dibahas 15 kasus dimana pada kasus 1 sampai 9 terbentuk persamaan diferensial ordiner, sedangkan pada kasus 10 sampai 15 terbentuk persamaan diferensial parsial. Karena bab ini menekankan pada penyusunan, maka penyelesaiannya tidak akan dibahas.

1. Pencampuran dalam Tangki secara *Batch* (Neraca Massa)

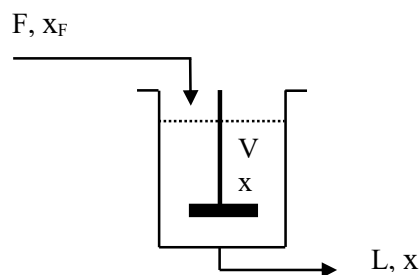
Suatu tangki berpengaduk mula-mula berisi V_0 kg air murni. Mulai suatu saat kedalam tangki dimasukkan F kg/menit larutan garam dengan kadar x_F (kg garam/kg larutan), dan dari tangki dikeluarkan larutan dengan kecepatan L kg/menit (lihat Gambar 3.1). Akan disusun persamaan-persamaan matematis yang bisa dipakai untuk mencari kadar garam dalam larutan keluar tangki pada berbagai waktu (t). Misal pada saat t , jumlah larutan dalam tangki V kg, sedangkan kadar garam dalam larutan keluar = x . Karena pengadukan dianggap sempurna, maka kadar garam larutan dalam tangki seragam dan sama dengan kadar garam dalam larutan keluar tangki, yaitu x .

Neraca massa larutan dalam tangki:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$F - L = \frac{d}{dt}(V) \quad (3.1)$$

(rate of accumulation diisi d/dt dari yang dineracakan, yaitu massa larutan dalam tangki).



Gambar 3.1. Tangki pencampuran

Neraca massa garam dalam tangki:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$F \cdot x_F - L \cdot x = \frac{d}{dt}(V \cdot x) \quad (3.2)$$

(rate of accumulation diisi d/dt dari yang dineracakan, yaitu massa garam dalam tangki).

Manipulasi persamaan (3.2) menghasilkan:

$$V \frac{dx}{dt} + x \frac{dV}{dt} = F \cdot x_F - L \cdot x \quad (3.3)$$

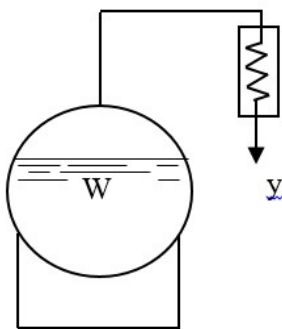
Keadaan batas untuk persamaan (3.3) adalah:

$$t = 0; V = V_0; x = 0 \quad (3.4)$$

Hasil dari persamaan neraca massa adalah persamaan diferensial ordiner (3.1) dan (3.3) dengan keadaan batas (3.4).

2. Penguapan secara Batch (Neraca Massa dan Kesetimbangan)

Dalam suatu labu terdapat campuran biner cair A dan B (A lebih mudah menguap atau lebih volatil) sebanyak W_0 gmol dengan fraksi mol A $= x_0$. Labu dipanasi sehingga terjadi penguapan cairan. Uap yang keluar dianggap selalu dalam keadaan setimbang dengan cairannya. Kesetimbangan uap-cair dianggap mengikuti Hukum Raoult-Dalton. Akan disusun persamaan-persamaan matematis yang bisa dipakai untuk mencari kadar A dalam cairan sisa, pada saat 30% cairan sudah menguap.



Misal pada saat t , cairan tersisa $= W$, fraksi mol A dalam cairan $= x$ dan kadar A dalam uap yang terbentuk saat tersebut $= y$. Misal jumlah uap yang terbentuk pada interval waktu t sampai $t + dt$ (harga dt sangat kecil) adalah dV . Karena dt sangat kecil, maka fraksi mol A dalam uap sebanyak dV tersebut dianggap sama yaitu y

Gambar 3.2 Penguapan secara batch

Selama interval waktu yang sama, jumlah cairan berubah sebesar dW dan fraksi mol A dalam cairan selama interval waktu sangat kecil tersebut dianggap tetap x .

Neraca massa cairan dalam labu pada saat t sampai $t + dt$:

$$\text{Input} - \text{Output} = \text{Accumulation}$$

$$0 - dV = dW \quad (3.5)$$

atau

$$-dV = dW \quad (3.6)$$

Neraca massa A dalam labu pada saat t sampai $t + dt$:

$$\text{Input} - \text{Output} = \text{Accumulation}$$

$$0 - y \cdot dV = d(W \cdot x) \quad (3.7)$$

(*Accumulation* diisi d dari yang dineracakan, yaitu massa A dalam labu; karena tidak menggunakan *rate*, maka bentuk bukan $\frac{d}{dt}$).

Manipulasi persamaan (3.7) dengan bantuan persamaan (3.6) menghasilkan:

$$W \cdot dx + x \cdot dW = -y(-dW) \quad (3.8)$$

$$W \cdot dx = (y - x)dW \quad (3.9)$$

Hubungan kesetimbangan Raoult-Dalton:

$$y = \frac{\alpha \cdot x}{1 + (\alpha - 1)x} \quad (3.10)$$

Substitusi persamaan (3.10) ke persamaan (3.9) menghasilkan:

$$W \cdot dx = \left(\frac{\alpha \cdot x}{1 + (\alpha - 1)x} - x \right) dW \quad (3.11)$$

$$\int_{x=x_0}^{x=x_1} \frac{dx}{\frac{\alpha \cdot x}{1 + (\alpha - 1)x} - x} = \int_{W=W_0}^{W=0,7W_0} \frac{dW}{W} \quad (3.12)$$

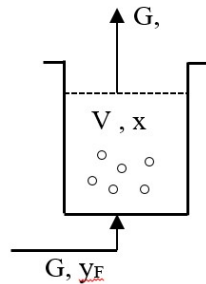
Dengan integrasi persamaan (3.12), harga x_1 dapat dicari.

3. Absorpsi Gas dengan Pengelembungan dalam Cairan (Neraca Massa dan Kesetimbangan)

Udara buangan pabrik yang mengandung A akan dihilangkan A nya sebelum dibuang ke udara, dengan cara menggelembungkan udara tersebut dalam larutan penyerap A yang tidak volatil, sehingga sebagian besar A terserap dalam larutan. Jumlah udara = G mol udara bebas A /waktu dengan kadar $A = y_F$ gmol A /gmol udara bebas A . Setiap saat, kandungan A dalam cairan dapat dianggap seragam. Kandungan gas A dalam gas keluar cairan dianggap dalam keadaan setimbang dengan A dalam cairan (kontak dianggap sangat baik). Hubungan kesetimbangan uap-cair mengikuti hukum Henry:

$$y = H \cdot x \quad (3.13)$$

dengan x = gmol A /gmol pelarut bebas A . Suhu system dianggap tetap sehingga harga H tetap. Larutan penyerap berjumlah V gmol dan mula-mula belum mengandung A . Dengan berjalannya waktu, kandungan A dalam cairan makin tinggi sehingga kadar A dalam udara keluar makin tinggi pula. Pelarut harus diganti dengan yang baru setelah kadar A dalam udara keluar menjadi y_b . Ingin disusun persamaan-persamaan matematis yang dapat dipakai untuk mencari waktu sampai pelarut (solven) harus diganti dengan yang baru.



Pada penyusunan persamaan matematis di sini, cairan dianggap homogen (teraduk baik akibat penggelembungan). Misal pada saat t , kandungan A dalam cairan = x sedangkan kandungan A dalam udara keluar = y

Gambar 3.3 Absorpsi dengan penggelembungan

Neraca massa A dalam tangki:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$G \cdot y_F - G \cdot y = \frac{d}{dt} (A \text{ dalam cairan} + A \text{ dalam gelembung}) \quad (3.14)$$

Karena rapat massa gas jauh lebih kecil daripada rapat massa cairan, maka pada *rate of accumulation*, A dalam gelembung dianggap sangat kecil disbanding A dalam cairan, sehingga diabaikan. Sebagai hasilnya, diperoleh persamaan:

$$G \cdot y_F - G \cdot y = \frac{d}{dt} (V \cdot x) \quad (3.15)$$

$$V \frac{dx}{dt} = G \cdot (y_F - y) \quad (3.16)$$

Substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.16) menghasilkan:

$$V \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{H} \right) = G \cdot (y_F - y) \quad (3.17)$$

$$\int_{y=0}^{y=y_b} \frac{dy}{(y_F - y)} = \frac{G \cdot H}{V} \int_{t=0}^{t=t_1} dt \quad (3.18)$$

Integrasi persamaan (3.18) akan menghasilkan waktu penggantian solven t_1 .

4. Biodegradasi Zat Organik dalam Sungai (Neraca Massa, Kestimbangan dan Proses-proses Kecepatan)

Di dalam sungai, zat organik ($C_xH_yO_z$) dibongkar oleh mikroba menjadi CO_2 dan H_2O menurut reaksi:



Dalam hal ini zat organik bereaksi dengan oksigen terlarut dalam air. Koefisien reaksi semua 1 karena jumlah bahan dinyatakan dengan BOD (jumlah oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi sempurna zat organik secara biologis). Bila kadar oksigen terlarut dalam air lebih rendah dari kadar jenuhnya karena terpakai untuk reaksi maka akan terjadi transfer oksigen dari udara ke air. Oleh karena itu, dalam proses biodegradasi zat organik dalam sungai terjadi 2 proses simultan, yaitu reaksi kimia di fasa cair dan transfer massa dari udara ke air. Bila kadar zat organik dalam air sangat tinggi, maka kecepatan reaksi kimia akan sangat besar sehingga kecepatan pemakaian oksigen akan lebih tinggi dari kecepatan transfer oksigen dari udara. Akibatnya, kadar oksigen terlarut dalam air akan turun. Jika kadar oksigen tersebut mencapai harga di bawah suatu batas tertentu, maka mikroba akan mati. Hal ini perlu dicegah antara lain dengan pembatasan jumlah buangan limbah zat organik ke sungai, atau dengan aerasi sungai tersebut. Oleh karena itulah, deskripsi kuantitatif proses biodegradasi zat organik dalam sungai diperlukan.

Kecepatan reaksi kimia antara zat organik dan oksigen dengan bantuan mikroba cukup kompleks, tetapi dalam contoh ini diambil bentuk yang sangat sederhana, yaitu:

$$r_A = \frac{\beta \cdot C_A \cdot C_B}{(C_A + \alpha)} = r_B \quad (3.20)$$

dengan

C_A = Kadar zat organik di air, dinyatakan dalam BOD (mg/L)

C_B = Kadar oksigen terlarut di air (mg/L)

r_A = Kecepatan reaksi zat organik (mg BOD/detik/L)

r_B = Kecepatan reaksi oksigen (mg/detik/L)

α, β = Tetapan

Dalam hal ini $r_A = r_B$, karena jumlah zat organik dinyatakan dalam BOD. Persamaan (3.20) adalah konsep kinetika kimia (proses kecepatan). Perlu diperhatikan bahwa pemodelan akan lebih mudah jika jumlah zat organik dinyatakan dalam BOD (*biological oxygen demand*). Kecepatan perpindahan massa oksigen dari udara ke air dapat didekati dengan persamaan:

$$n_B = K_L(C_B^* - C_B) \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{k_L} + \frac{1}{H_B k_G} \quad (3.22)$$

$$C_B^* = \frac{P_{BG}}{H_B} \quad (3.23)$$

dalam hal ini:

n_B = Kecepatan transfer oksigen (mg/detik/dm²)

K_L = Koefisien perpindahan massa gabungan

k_L = Koefisien perpindahan massa fasa air

k_G = Koefisien perpindahan massa fasa gas

C_B^* = Kadar oksigen jenuh dalam air

H_B = Tetapan Henry

P_{BG} = Tekanan parsial oksigen di udara (atm) = 0.21 atm

Persamaan (3.21), (3.22) dan (3.23) adalah konsep proses kecepatan dibidang fisis (perpindahan massa).

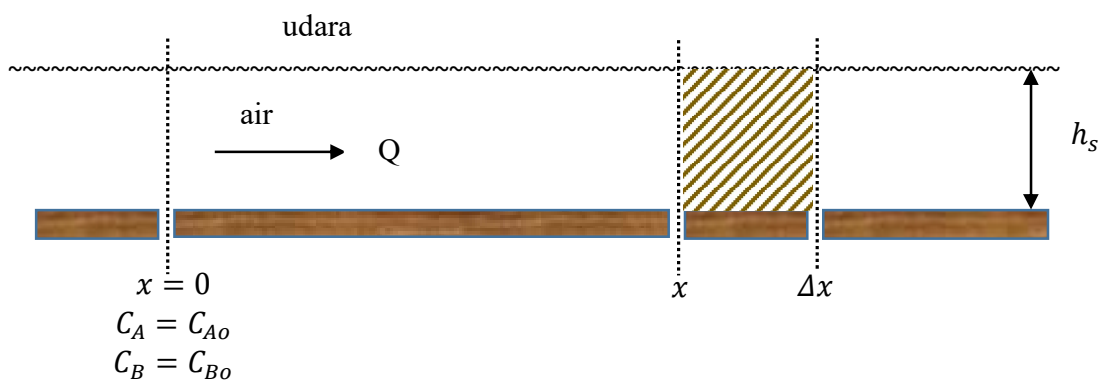
Untuk oksigen, harga H_B sangat besar sehingga dari persamaan (3.22) dapat disimpulkan bahwa:

$$K_L = k_L \quad (3.24)$$

Oleh karena itu persamaan (3.21) dapat diganti dengan:

$$n_B = k_L(C_B^* - C_B) \quad (3.25)$$

Selanjutnya model matematis proses biodegradasi dalam sungai tersebut dapat disusun sebagai berikut (lihat Gambar 3.4)



Gambar 3.4. Diagram sederhana suatu sungai

Misal pada $x = 0$ terjadi pembuangan limbah organik terus-menerus sehingga kadar zat organik di tempat tersebut C_{Ao} . Di sepanjang sungai dimisalkan terjadi input limbah dengan intensitas W yang merupakan fungsi posisi (x). Hubungan W dan x dianggap dapat didekati dengan polinomial:

$$W = a_0 + a_1x + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n \quad (3.26)$$

dengan W dalam mg BOD/waktu/panjang sungai. Dalam hal ini lebar sungai dianggap $= B$ dan dalam sungai $= h_s$, serta debit sungai Q .

Harga k_L dapat didekati dengan persamaan O'Connor and Dobbins (Thibodeaux, 1979):

$$k_L = b \cdot \left[\frac{D \cdot Q}{B \cdot h_s^2} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

dengan

D = Difusivitas oksigen dalam air (dm²/detik)

Q = Debit sungai (L/detik)

B = Lebar sungai (dm)

h_s = Dalam sungai (dm)

b = Tetapan

Neraca massa zat organik dalam elemen volum setebal Δx pada keadaan steady:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$(\bar{W} \cdot \Delta x + Q \cdot C_A|_x) - (Q \cdot C_A|_{x+\Delta x}) - (h_s \cdot B \cdot \Delta x \cdot \bar{r}_A) = 0 \quad (3.28)$$

Dalam hal ini, tanda garis di atas lambang menyatakan tanda rata-rata pada interval x sampai $x + \Delta x$.

Manipulasi persamaan (3.28) menghasilkan:

$$\frac{C_A|_{x+\Delta x} - C_A|_x}{\Delta x} = \frac{\bar{W}}{Q} - \frac{h_s \cdot B}{Q} \cdot \bar{r}_A \quad (3.29)$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0$, maka menurut definisi matematika (lihat Bab 4.1):

$$\frac{dC_A}{dx} = \frac{W}{Q} - \frac{h_s \cdot B}{Q} \cdot r_A \quad (3.30)$$

($\bar{r}_A$ dan $\bar{W}$ masing-masing berubah menjadi r_A dan W , karena $\Delta x \rightarrow 0$).

Neraca massa oksigen pada elemen volum setebal Δx pada keadaan steady:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$Q \cdot C_B|_x + B \cdot \Delta x \cdot k_L (C_B^* - \bar{C}_B) - (Q \cdot C_B|_{x+\Delta x}) - (h_s \cdot B \cdot \Delta x \cdot \bar{r}_B) = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{C_B|_{x+\Delta x} - C_B|_x}{\Delta x} = \frac{k_L \cdot B}{Q} (C_B^* - \bar{C}_B) - \frac{h_s \cdot B}{Q} \cdot \bar{r}_B \quad (3.32)$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0$, maka menurut definisi matematika:

$$\frac{dC_B}{dx} = \frac{k_L \cdot B}{Q} (C_B^* - C_B) - \frac{h_s \cdot B}{Q} \cdot r_A \quad (3.33)$$

($\bar{C}_B$ dan $\bar{r}_A$ masing masing menjadi C_B dan r_A karena $\Delta x \rightarrow 0$).

Keadaan batas untuk persamaan-persamaan diferensial tersebut adalah:

$$x = 0; C_A = C_{Ao}; C_B = C_{Bo} \quad (3.34)$$

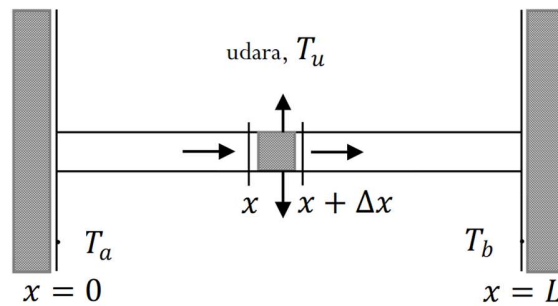
Persamaan-persamaan (3.30) dan (3.33) merupakan persamaan diferensial ordiner simultan order satu. Dengan bantuan persamaan (3.26) dan persamaan (3.27) serta keadaan batas (3.34), persamaan-persamaan diferensial tersebut dapat diselesaikan secara numeris, misalnya dengan metode Runge-Kutta (Bab 4.7).

5. Distribusi Suhu Batang di Udara (Neraca Panas dan Proses Kecepatan)

Suatu batang logam dengan diameter D , panjang L , kedua ujungnya melekat pada dinding-dinding yang suhunya berbeda, yaitu T_a dan T_b (Gambar 3.5). Suhu udara diketahui T_u . Diameter batang sangat kecil disbanding dengan panjang batang dan konduktivitas panas batang besar, sehingga gradien suhu dalam batang pada arah radial bisa diabaikan. Koefisien perpindahan panas antara permukaan batang dan udara = h . Ingin disusun persamaan matematis yang dapat dipakai untuk mencari distribusi suhu batang pada keadaan *steady* $\{T = f(x)\}$.

Dalam hal ini terjadi 2 macam perpindahan panas, yaitu:

- 1) Perpindahan panas konduksi arah aksial dalam batang ($Q = -k \cdot A \cdot dT/dx$).
- 2) Perpindahan panas antar fasa dari permukaan batang ke udara ($Q = h \cdot A(T - T_u)$)



Gambar 3.5. Batang di udara

Neraca panas pada elemen volum sepanjang Δx pada batang:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-k \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \frac{dT}{dx}\right)_x - \left(-k \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \frac{dT}{dx}\right)_{x+\Delta x} + h \cdot \pi \cdot D \cdot \Delta x \cdot (\bar{T} - T_u) = 0 \quad (3.35)$$

Dalam hal ini $\bar{T}$ adalah suhu rata-rata batang antara x sampai $x + \Delta x$. Manipulasi persamaan (3.35) menghasilkan:

$$\frac{\frac{dT}{dx}|_{x+\Delta x} - \frac{dT}{dx}|_x}{\Delta x} - \frac{4.h}{k.D} (\bar{T} - T_u) = 0 \quad (3.36)$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0$ maka menurut definisi matematika (lihat Bab 4.1) diperoleh

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - \frac{4.h}{k.D} (T - T_u) = 0 \quad (3.37)$$

($\bar{T}$ berubah menjadi T karena $\Delta x \rightarrow 0$).

Jadi persamaan matematis untuk peristiwa ini adalah:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{4.h}{k.D} (T - T_u) = 0 \quad (3.38)$$

dengan keadaan batas:

$$x = 0; T = T_a \quad (3.39)$$

$$x = L; T = T_b \quad (3.40)$$

Penyelesaian persamaan (3.38) dengan keadaan batas (3.39) dan (3.40) akan menghasilkan $T = f(x)$.

6. Difusi dan Reaksi Kimia dalam Katalisator Padat Berbentuk Bola Berpori (Neraca Massa dan Proses Kecepatan)

Reaksi fasa gas order satu



berlangsung di permukaan pori katalisator padat berbentuk bola berjari-jari R . Sistem dianggap isotermis. Konsentrasi A pada fasa gas di permukaan luar bola = C_{As} . Gas A mendifusi ke dalam bola melalui pori katalisator sambil sebagian bereaksi di permukaan pori katalisator. Kecepatan difusi A melalui pori dianggap mengikuti persamaan yang mirip dengan difusi gas, yaitu:

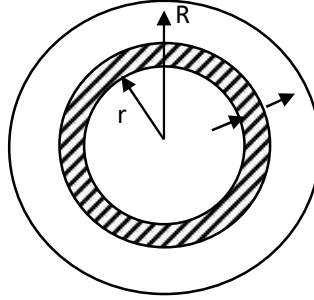
$$N_A \left(\frac{gmol A}{waktu} \right) = -D_e (luas) \frac{dC_A}{d(jarak)} \quad (3.42)$$

Kecepatan reaksi di permukaan pori katalisator mengikuti persamaan:

$$r_A \left(\frac{gmol A}{(waktu)(luas\ pori)} \right) = k \cdot C_A \quad (3.43)$$

Luas permukaan pori tiap volum bola = a . Ingin disusun persamaan matematis yang bisa dipakai untuk mencari konsentrasi gas A pada berbagai posisi dalam bola pada keadaan *steady* $\{C_A = f(r)\}$.

Dalam penyusunan model matematis, perpindahan massa A dalam bola dianggap ke arah r positif (keluar) walaupun sebenarnya ke arah r negative (ke dalam), karena kedua keadaan tersebut akan memberikan hasil persamaan matematis yang sama.



Gambar 3.6. Elemen volum setebal Δr dalam bola berpori

Neraca massa A pada elemen volum:

Rate of Input – Rate of Output Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$\left(-D_e \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dC_A}{dr}\right)_r - \left(-D_e \cdot 4\pi (r + \Delta r)^2 \cdot \frac{dC_A}{dr}\right)_{r+\Delta r} - k \cdot C_A \cdot a \cdot 4\pi \bar{r}^2 \Delta r = 0 \quad (3.44)$$

$(4\pi \bar{r}^2 \Delta r)$ menyatakan volum dari elemen volum, yaitu luas $4\pi \bar{r}^2$ dan tebalnya Δr ; $\bar{r}$ menyatakan r rata-rata dari r sampai $r + \Delta r$.

Manipulasi persamaan (3.44) menghasilkan:

$$\frac{(r+\Delta r)^2 \frac{dC_A}{dr}\big|_{r+\Delta r} - r^2 \frac{dC_A}{dr}\big|_r}{\Delta r} - \frac{k \cdot a}{D_e} (\bar{r})^2 C_A = 0 \quad (3.45)$$

Jika diambil $\Delta r \rightarrow 0$ maka menurut definisi matematika diperoleh:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dC_A}{dr} \right) - \frac{k \cdot a}{D_e} r^2 C_A = 0 \quad (3.46)$$

$$r^2 \frac{d^2 C_A}{dr^2} + 2r \frac{dC_A}{dr} - \frac{k \cdot a}{D_e} r^2 C_A = 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{d^2 C_A}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dC_A}{dr} - \frac{k \cdot a}{D_e} C_A = 0 \quad (3.48)$$

Keadaan batas untuk peristiwa ini adalah:

$$r = R; C_A = C_{As} \quad (3.49)$$

$$r = 0; \frac{dC_A}{dr} = 0 \quad (3.50)$$

(konsentrasi A pada pusat bola selalu minimum, karena sambil berjalan kearah pusat bola, A bereaksi).

Persamaan (3.48) dengan keadaan batas (3.49) dan (3.50) bila diselesaikan akan menghasilkan $C_A = f(r)$.

7. Reaksi Homogen Fasa Cair dalam Tangki Berpengaduk yang Bekerja secara *Batch* (Neraca Massa, Neraca Panas dan Proses Kecepatan)

Reaksi fasa cair endotermis order satu:

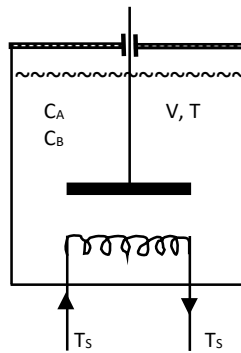


dijalankan dalam reaktor tangki berpengaduk yang bekerja secara *batch* (Gambar 3.7). Konsentrasi A mula-mula = C_{A0} . Kecepatan reaksi mengikuti persamaan:

$$r_A = k \cdot C_A \quad (3.51)$$

dengan

$$k = A \cdot \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) \quad (3.52)$$



Gambar 3.7. Reaktor *batch* tangki berpengaduk

Panas reaksi endotermis besarnya λ cal/gmol A . Rapat massa campuran dianggap tetap, sedangkan kapasitas panasnya dianggap tetap c_p . Suhu campuran mula-mula = T_0 . Untuk menjaga agar suhu campuran tetap tinggi, reaktor dilengkapi dengan koil pemanas yang dialiri *steam* jenuh bersuhu T_s . Embunan keluar koil pada suhu T_s . Koefisien perpindahan panas antara steam dan cairan = U . Luas permukaan koil = A_c . Tangki, pengaduk dan koil dianggap tidak menyerap panas dan panas hilang ke sekeliling diabaikan. Ingin disusun persamaan matematis yang bisa dipakai untuk menghitung konversi $A(x)$ dan suhu campuran T pada berbagai waktu.

Neraca massa A pada larutan:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} - \text{Rate of Reaction} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$0 - 0 - k \cdot C_A \cdot V = \frac{d}{dt}(V \cdot C_A) \quad (3.53)$$

(*rate of accumulation* di isi d/dt dari yang dineracakan, yaitu A dalam larutan).

Karena V tetap (ρ dianggap tetap), maka:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k \cdot C_A \quad (3.54)$$

Misal konversi $A = x$, maka:

$$C_A = C_{A0}(1 - x) \quad (3.55)$$

Substitusi persamaan (3.55) ke persamaan (3.54) menghasilkan:

$$\begin{aligned} -C_{A0} \frac{dx}{dt} &= -k \cdot C_{A0}(1 - x) \\ \frac{dx}{dt} &= k(1 - x) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Neraca panas dalam campuran:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$U \cdot A_c \cdot (T_s - T) - 0 - k \cdot C_A \cdot V \cdot \lambda = \frac{d}{dt}(H) \quad (3.57)$$

($k \cdot C_A \cdot V$ menyatakan A bereaksi tiap satuan waktu, H menyatakan entalpi campuran).

Menurut termodinamika:

$$dH = m \cdot c_p \cdot dT = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot dT \quad (3.58)$$

sehingga

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dT} \frac{dT}{dt} = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \quad (3.59)$$

Substitusi persamaan (3.59) ke persamaan (3.57) menghasilkan:

$$V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} = U \cdot A_c \cdot (T_s - T) - k \cdot C_A \cdot V \cdot \lambda \quad (3.60)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U \cdot A_c}{V \cdot \rho \cdot c_p} (T_s - T) - \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} k \cdot C_A \quad (3.61)$$

Persamaan tambahan (persamaan Arrhenius):

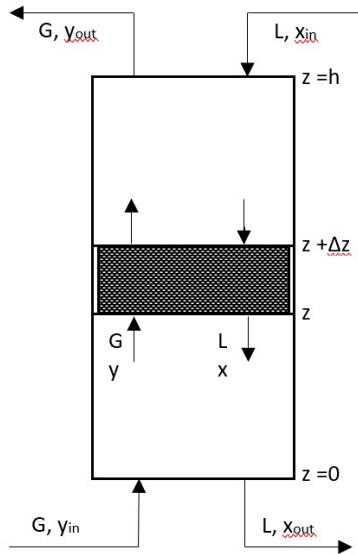
$$k = A \cdot \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) \quad (3.62)$$

Keadaan batas untuk peristiwa ini adalah:

$$t = 0; C_A = C_{A0}; T = T_0 \quad (3.63)$$

Persamaan (3.56), (3.61), (3.62) dengan keadaan batas (3.63) bila diselesaikan akan menghasilkan $C_A = f_1(t)$ dan $T = f_2(t)$. Selanjutnya C_B bisa dicari sebagai $C_B = C_{A0} - C_A$.

8. Menara Absorpsi Isotermis ((Neraca Massa, Kestimbangan dan Proses Kecepatan)



Gambar 3.8. Menara absorber

Udara yang mengandung zat A akan diambil A nya dengan absorpsi menggunakan solven B yang tidak volatil dalam menara dengan bahan isian (*packed tower*) yang luas tampang lintangnya S . Udara berjumlah G gmol udara bebas A /menit dengan kandungan $A = y_{in}$ (gmol A /gmol udara bebas A) masuk dari dasar menara. Pelarut sebanyak L gmol pelarut bebas A /menit yang sudah mengandung A sebanyak x_{in} gmol A /gmol pelarut bebas A masuk dari puncak menara. Menara dapat dianggap bekerja secara isotermis dan dalam keadaan *steady*.

Perpindahan massa A dari fasa gas ke fasa cair mengikuti persamaan:

$$N_A \left(\frac{\text{gmol } A}{(\text{waktu})(\text{volum menara})} \right) = -K_y a (y - y^*) \quad (3.64)$$

(lihat teori pada Bab 2).

Hubungan kesetimbangan gas-cair mengikuti hukum Henry:

$$y^* = H \cdot x \quad (3.65)$$

Ingin disusun persamaan matematis yang bisa dipakai untuk menghitung tinggi menara yang diperlukan bila udara keluar diinginkan hanya tinggal mengandung A sebanyak y_{out} (gmol A /gmol udara bebas A).

Karena arus udara bebas A ke atas dan arus solven bebas A ke bawah tetap, maka perhitungan akan jauh lebih mudah jika kadar-kadar dinyatakan sebagai perbandingan terhadap bahan yang tetap tadi ($x, y = \text{mole ratio}$).

Neraca massa A pada seluruh menara menghasilkan:

$$G \cdot y_{in} + L \cdot x_{in} = G \cdot y_{out} + L \cdot x_{out} \quad (3.66)$$

atau

$$x_{out} = x_{in} + \frac{G}{L} (y_{in} - y_{out}) \quad (3.67)$$

Neraca massa A pada fase gas dalam elemen volum setebal Δz :

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$(G \cdot y|_z) - (G \cdot y|_{z+\Delta z} + K_y a (\bar{y} - \bar{y}^*) S \cdot \Delta z) = 0 \quad (3.68)$$

(tanda garis di atas lambang menunjukkan harga rata-rata dari z sampai $z + \Delta z$)

$$\frac{y|_{z+\Delta z} - y|_z}{\Delta z} = -\frac{K_y a.S}{G}(\bar{y} - \bar{y}^*) \quad (3.69)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$ maka menurut definisi matematika, diperoleh:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{K_y a.S}{G}(y - y^*) \quad (3.70)$$

(karena $\Delta z \rightarrow 0$ maka tanda rata-rata tidak diperlukan lagi).

Hubungan kesetimbangan memberikan:

$$y^* = H.x \quad (3.71)$$

Neraca massa A pada menara dari $z = 0$ sampai $z = z$:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$(G.y_{in} + L.x) - (G.y + L.x_{out}) = 0$$

$$x = x_{out} - \frac{G}{L}(y_{in} - y) \quad (3.72)$$

Tinggi menara dapat dicari dengan manipulasi dan integrasi persamaan (3.70) sebagai berikut:

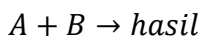
$$\int_0^h dz = -\frac{G}{K_y a.S} \int_{y=y_{in}}^{y=y_{out}} \frac{dy}{(y-y^*)} \quad (3.73)$$

$$h = \frac{G}{K_y a.S} \int_{y=y_{out}}^{y=y_{in}} \frac{dy}{(y-y^*)} \quad (3.74)$$

Integrasi persamaan (3.74) dengan bantuan persamaan (3.71) dan (3.72) menghasilkan tinggi menara yang diperlukan.

9. Reaksi Heterogen Cair-cair dalam Tangki Berpengaduk (Neraca Massa, Kesetimbangan dan Proses Kecepatan)

Reaksi heterogen cair-cair:



dijalankan dalam tangki berpengaduk yang bekerja isothermis. Mula-mula dalam tangki terdapat fasa I yang mengandung A dengan konsentrasi x_{A0} gmol A /volum fasa I, dan fasa II yang mengandung B dengan konsentrasi y_{B0} gmol B /volum fasa II. Kadar zat-zat di fasa I diberi simbol x , sedangkan kadar zat-zat di fasa II diberi simbol y . Volum fasa I dan fasa II dianggap tetap, masing-masing V_I dan V_{II} . Keadaan dianggap isothermal. Zat A berpindah dari fasa I ke fasa II dengan kecepatan:

$$N_A \left(\frac{\text{gmol } A}{(\text{waktu})(\text{volum campuran})} \right) = -K_{xA}a(x_A - x_A^*) \quad (3.75)$$

Dengan hubungan kesetimbangan antara A pada fasa I dengan A pada fasa II mengikuti persamaan:

$$y_A = H_A \cdot x_A^* \quad (3.76)$$

Di fasa II, zat A bereaksi dengan B dengan kecepatan

$$r_{II} \left(\frac{\text{gmol } A}{(\text{waktu})(\text{volum fasa II})} \right) = k_{II} \cdot y_A \cdot y_B \quad (3.77)$$

Zat B berpindah dari fasa II ke fasa I dengan kecepatan:

$$N_B \left(\frac{\text{gmol } B}{(\text{waktu})(\text{volum campuran})} \right) = -K_{xB} a(x_B^* - x_B) \quad (3.78)$$

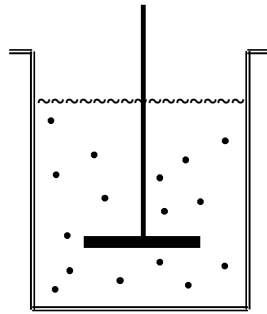
dengan

$$y_B = H_B \cdot x_B^* \quad (3.79)$$

dan kemudian di fasa I, bereaksi dengan A menurut kecepatan reaksi:

$$r_I \left(\frac{\text{gmol } B}{(\text{waktu})(\text{volum fasa I})} \right) = k_I \cdot x_A \cdot x_B \quad (3.80)$$

Ingin dicari persamaan-persamaan matematis yang bisa dipakai untuk menghitung konsentrasi A dan B di fasa I (x_A, x_B) dan konsentrasi A dan B di fasa II (y_A, y_B) pada berbagai waktu (t).



Gambar 3.9 Reaksi heterogen fasa cair dalam tangki berpengaduk

Neraca massa A di fasa I:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} - \text{Rate of Reaction} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$0 - K_{xA} \cdot a \cdot (x_A - x_A^*) (V_I + V_{II}) - k_I \cdot x_A \cdot x_B \cdot V_I = \frac{d}{dt} (V_I \cdot x_A) \quad (3.81)$$

$$\frac{dx_A}{dt} = - \frac{(V_I + V_{II})}{V_I} K_{xA} \cdot a \cdot (x_A - x_A^*) - k_I \cdot x_A \cdot x_B \quad (3.82)$$

Neraca massa B di fasa I:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} - \text{Rate of Reaction} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$K_{xB} \cdot a \cdot (x_B^* - x_B) (V_I + V_{II}) - 0 - k_I \cdot x_A \cdot x_B \cdot V_I = \frac{d}{dt} (V_I \cdot x_B) \quad (3.83)$$

$$\frac{dx_B}{dt} = \frac{(V_I + V_{II})}{V_I} K_{xB} \cdot a (x_B^* - x_B) - k_I \cdot x_A \cdot x_B \quad (3.84)$$

Neraca massa A di fasa II:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$K_{x_A} \cdot a \cdot (x_A - x_A^*)(V_I + V_{II}) - 0 - k_{II} \cdot y_A \cdot y_B \cdot V_{II} = \frac{d}{dt}(V_{II} \cdot y_A) \quad (3.85)$$

$$\frac{dy_A}{dt} = \frac{(V_I + V_{II})}{V_I} K_{x_A} \cdot a \cdot (x_A - x_A^*) - k_{II} \cdot y_A \cdot y_B \quad (3.86)$$

Neraca massa B di fasa II:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$0 - K_{x_B} \cdot a \cdot (x_B^* - x_B)(V_I + V_{II}) - k_{II} \cdot y_A \cdot y_B \cdot V_{II} = \frac{d}{dt}(V_{II} \cdot y_B) \quad (3.87)$$

$$\frac{dy_B}{dt} = -\frac{(V_I + V_{II})}{V_I} K_{x_B} \cdot a \cdot (x_B^* - x_B) - k_{II} \cdot y_A \cdot y_B \quad (3.88)$$

Penyelesaian persamaan (3.82), (3.84), (3.86) dan (3.88) dengan bantuan persamaan (3.76), (3.79) serta dengan keadaan batas:

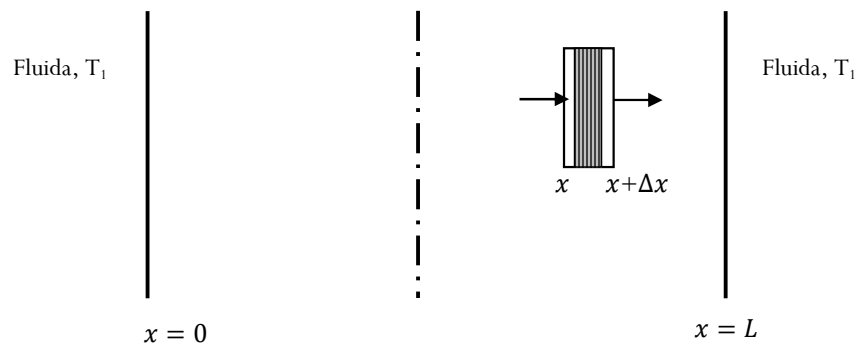
$$t = 0; x_A = x_{A0}; x_B = 0; y_A = 0; y_B = y_{B0} \quad (3.89)$$

menghasilkan $x_A = f(t)$; $x_B = f(t)$; $y_A = f(t)$ dan $y_B = f(t)$.

10. Perpindahan Panas Konduksi *Unsteady State* Satu Arah dalam Slab (Neraca Panas dan Proses Kecepatan)

Suatu slab (lempengan) luas tak berhingga tebal L , mula-mula bersuhu T_0 . Mulai suatu saat slab dicelup dalam fluida yang suhunya dijaga tetap T_1 . Koefisien perpindahan panas antara permukaan slab dan fluida = h . Rapat massa, kapasitas panas dan konduktivitas panas slab tetap masing-masing ρ , C_p dan k .

Karena slab sangat luas, maka perpindahan panas hanya berlangsung dengan arah x . Ingin disusun persamaan matematis yang bisa dipakai untuk menghitung suhu pada titik-titik dalam slab sebagai fungsi posisi dan waktu $\{T = f(x, t)\}$.



Gambar 3.10. Slab dengan luas tidak berhingga

Neraca panas pada elemen volum setebal Δx , luas A :

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x - \left(-k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.90)$$

(akumulasi panas berupa kenaikan suhu dan hubungannya adalah $dQ = m \cdot C_p \cdot dT$).

$$\left(\frac{\frac{\partial T}{\partial x}\big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}\big|_x}{\Delta x}\right) = \frac{\rho \cdot C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.91)$$

Bila diambil $\Delta x \rightarrow 0$ maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\rho \cdot C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho \cdot C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.93)$$

Keadaan batas:

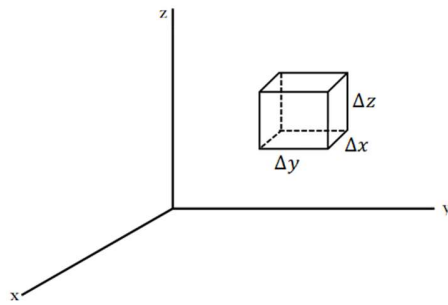
$$T(x, 0) = T_0 \quad (3.94)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = h(T_1 - (T(0, t))) \quad (3.95)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h(T(L, t) - T_1) \quad (3.96)$$

Keadaan batas (3.95) dan (3.96) disusun berdasar anggapan bahwa kecepatan perpindahan panas pada sekitar permukaan bersifat kontinu.

11. Perpindahan Panas Konduksi *Unsteady State* 3 Arah pada Koordinat Cartesian dengan *Heat Generation* (Neraca Panas dan Proses Kecepatan)



Pada suatu benda padat, terjadi perpindahan panas 3 arah pada keadaan *unsteady* (sistem koordinat Cartesian) dan dalam padatan timbul panas sebesar λ panas/waktu/volum. Ingin disusun persamaan matematis perpindahan panasnya.

Gambar 3.11. Elemen volum dalam sistem Cartesian

Ditinjau elemen volum berbentuk paralel epipedum (balok) dengan ukuran Δx , Δy , dan Δz .

Neraca panas pada elemen volum:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Heat Generation = Rate of Accumulation

$$(Q_x|_x + Q_y|_y + Q_z|_z) - (Q_x|_{x+\Delta x} + Q_y|_{y+\Delta y} + Q_z|_{z+\Delta z}) + \lambda \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$= \Delta x. \Delta y. \Delta z. \rho. C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.97)$$

$$- \frac{1}{\Delta y. \Delta z} \frac{Q_x|_{x+\Delta x} - Q_x|_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x. \Delta z} \frac{Q_y|_{y+\Delta y} - Q_y|_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x. \Delta y} \frac{Q_z|_{z+\Delta z} - Q_z|_z}{\Delta z} + \lambda = \rho. C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.98)$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ dan $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$- \frac{1}{dy.dz} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{1}{dx.dz} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{1}{dx.dy} \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \lambda = \rho. C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.99)$$

$$- \frac{1}{dy.dz} \frac{\partial}{\partial x} \left(-k. dy. dz. \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{dx.dz} \frac{\partial}{\partial y} \left(-k. dx. dz. \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{1}{dx.dy} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k. dx. dy. \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda = \rho. C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.100)$$

(dipakai hukum Fourier $Q = -k. (luas) \left[\frac{\partial T}{\partial (jarak)} \right]$).

Karena x, y, z tidak saling tergantung (*independent*), maka pada diferensial ke z , nilai dx dan dy tetap, pada diferensial ke y , nilai dx dan dz tetap sedangkan pada diferensial ke x , nilai dy dan dz tetap, sehingga diperoleh persamaan:

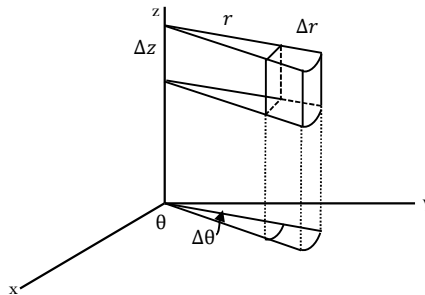
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda = \rho. C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.101)$$

Jika harga k tetap, maka bisa dikeluarkan dari diferensiasi, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\rho. C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.102)$$

12. Perpindahan Panas Konduksi *Unsteady State* 3 Arah pada Koordinat Silinder dengan *Heat Generation* (Neraca Panas dan Proses Kecepatan)

Pada suatu benda padat terjadi perpindahan panas 3 arah keadaan *unsteady* (sistem koordinat silinder) dan dalam padatan timbul panas sebesar λ panas/waktu/volum. Ingin disusun persamaan matematis perpindahan panasnya.



Gambar 3.12. Elemen volum dalam sistem silinder

Ditinjau elemen volum seperti pada Gambar 3.12. Rumus untuk perpindahan panas konduksi mengikuti hukum Fourier:

$$Q = k \cdot (luas) \cdot \left(\frac{\partial(suhu)}{\partial(jarak)} \right) \quad (3.103)$$

Pada sistem koordinat silinder, persamaan kecepatan perpindahan panas konduksi dicari sebagai berikut:

Arah Perpindahan	Beda Jarak	Luas Perpindahan	Q
r	Δr	$r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$	$-k \cdot r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$
θ	$r \cdot \Delta \theta$	$\Delta r \cdot \Delta z$	$-k \cdot \Delta r \cdot \Delta z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$
z	Δz	$r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta r$	$-k \cdot r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta r \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)$

Volum dari elemen volum:

$$\Delta V = \Delta r \cdot r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z = r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$$

Neraca panas pada elemen volum:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} - \text{Rate of Heat Generation} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$(Q_r|_r + Q_\theta|_\theta + Q_z|_z) - (Q_r|_{r+\Delta r} + Q_\theta|_{\theta+\Delta \theta} + Q_z|_{z+\Delta z}) + \lambda \cdot r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z = r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.105)$$

$$-\frac{1}{\Delta \theta \cdot \Delta z} \frac{Q_r|_{r+\Delta r} - Q_r|_r}{\Delta r} - \frac{1}{\Delta r \cdot \Delta z} \frac{Q_\theta|_{\theta+\Delta \theta} - Q_\theta|_\theta}{\Delta \theta} - \frac{1}{\Delta r \cdot \Delta \theta} \frac{Q_z|_{z+\Delta z} - Q_z|_z}{\Delta z} + \lambda \cdot r = \rho \cdot C_p \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.106)$$

Jika diambil $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta \theta \rightarrow 0$ dan $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$-\frac{1}{d\theta \cdot dz} \frac{\partial Q_r}{\partial r} - \frac{1}{dr \cdot dz} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{dr \cdot d\theta} \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \lambda \cdot r = \rho \cdot C_p \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.107)$$

$$-\frac{1}{d\theta \cdot dz} \frac{\partial}{\partial r} \left(-k \cdot r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{dr \cdot dz} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-k \cdot dr \cdot dz \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{dr \cdot d\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda \cdot r = \rho \cdot C_p \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + r \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda \cdot r = \rho \cdot C_p \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.109)$$

Jika harga k tetap, maka diperoleh:

$$k \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + k \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda \cdot r = \rho \cdot C_p \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.110)$$

$$k \cdot r \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + k \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k \cdot r \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda \cdot r = \rho \cdot C_p \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\rho \cdot C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.112)$$

13. Perpindahan Massa dalam Aliran Laminer dalam Pipa (Neraca Massa, Kesetimbangan dan Proses Kecepatan)

Suatu cairan B mengalir dalam pipa berjari-jari R secara laminer dengan distribusi kecepatan:

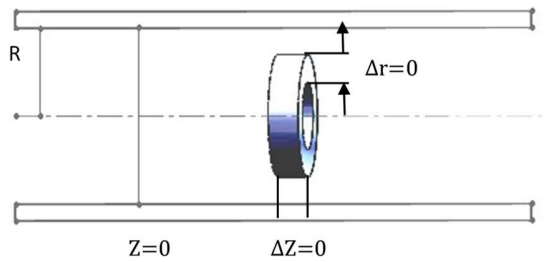
$$v = v_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.113)$$

dengan r = jarak dari sumbu pipa dan v_m = kecepatan maksimum (terjadi pada sumbu pipa). Pada $z < 0$, cairan mengandung zat A dengan konsentrasi C_{A0} (sangat kecil). Pada $z \geq 0$, dinding pipa mampu menyerap zat A dengan sangat cepat, sehingga konsentrasi A pada fluida yang bersinggungan dengan dinding pipa (pada $r = R$) selalu nol. Ingin disusun persamaan-persamaan matematis yang bisa dipakai untuk mencari konsentrasi A pada berbagai posisi radial dan aksial $\{C_A = f(r, z)\}$ bila keadaan dianggap sudah *steady*.

Perpindahan massa A arah radial berlangsung secara difusi molekuler, sehingga persamaanya:

$$N_A \left(\frac{\text{gmol } A}{(\text{waktu})(\text{luas})} \right) = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial r} \quad (3.114)$$

(lihat teori pada Bab 2)



Gambar 3.13. Elemen volum dalam pipa

Perpindahan massa A arah aksial berlangsung karena dibawa aliran dan difusi molekuler sehingga persamaannya:

$$N_A \left(\frac{\text{gmol } A}{(\text{waktu})(\text{luas})} \right) = v \cdot C_A - D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} \quad (3.115)$$

(sering kali $D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$ bisa diabaikan terhadap $v \cdot C_A$).

Neraca massa A pada elemen volum setebal Δr (radial) dan Δz (aksial) pada Gambar 3.13:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-D_{AB} \cdot 2\pi \bar{r} \cdot \Delta z \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_r + V \cdot C_A \Big|_z \cdot 2\pi \bar{r} \cdot \Delta r - D_{AB} \cdot 2\pi \bar{r} \cdot \Delta r \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_z \right) - \left(-D_{AB} \cdot 2\pi (r + \Delta r) \cdot \Delta z \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} + V \cdot C_A \Big|_{z+\Delta z} \cdot 2\pi \bar{r} \cdot \Delta r - D_{AB} \cdot 2\pi \bar{r} \cdot \Delta r \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} \right) = 0 \quad (3.116)$$

$$\frac{(r+\Delta r) \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} - r \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_r}{\Delta r} + \tilde{r} \frac{\frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_z}{\Delta z} - \frac{v \cdot \tilde{r}}{D_{AB}} \frac{C_A|_{z+\Delta z} - C_A|_z}{\Delta z} = 0 \quad (3.117)$$

Jika diambil $\Delta r \rightarrow 0$ dan $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial C_A}{\partial z} \right) - \frac{v \cdot r}{D_{AB}} \frac{\partial C_A}{\partial z} = 0 \quad (3.118)$$

$$r \cdot \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{\partial C_A}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} + \frac{v_m \cdot r}{D_{AB}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial C_A}{\partial z} = 0 \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} + \frac{v_m}{D_{AB}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial C_A}{\partial z} = 0 \quad (3.120)$$

Keadaan batas peristiwa ini adalah:

$$C_A(r, 0) = C_{A0} \quad (3.121)$$

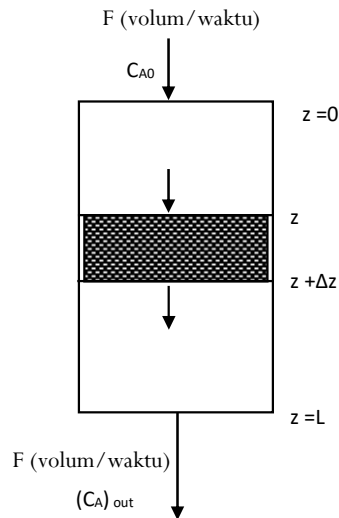
$$C_A(R, z) = 0 \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial r}(0, z) = 0 \quad (3.123)$$

(konsentrasi A pada sumbu maksimum)

Penyelesaian persamaan diferensial parsial (3.120) dengan kondisi batas (3.121), (3.122) dan (3.123) akan menghasilkan $C_A = f(r, z)$.

14. Adsorpsi pada *Fixed Bed Column* (Neraca Massa, Kestimbangan dan Proses Kecepatan)



Gambar 3.14. *Fixed bed column adsorber*

Air yang mengandung zat A dengan konsentrasi C_{A0} (sangat kecil) akan dihilangkan A nya dengan cara absorpsi. Air tersebut dialirkan dari atas ke bawah pada *fixed bed column* yang berisi butir-butir adsorben. Proses adsorpsi terjadi pada permukaan pori-pori dalam butir adsorben, sehingga untuk bisa teradsorpsi, A dari cairan mengalami proses-proses seri sebagai berikut:

- Perpindahan massa dari cairan ke permukaan butir
- Difusi dari cairan di permukaan butir ke cairan dalam pori butir melalui pori
- Perpindahan massa dari cairan dalam pori ke dinding pori
- Adsorpsi pada dinding pori

Perpindahan massa dari cairan dalam pori ke dinding pori (proses c) umumnya berlangsung sangat cepat sehingga tidak mengontrol. Adsorpsi pada dinding pori (proses d) umumnya juga berlangsung relatif cepat, sehingga tidak mengontrol juga. Jadi yang umumnya mengontrol kecepatan proses adsorpsi adalah proses a atau proses b atau keduanya. Jika butir-butir sangat kecil (seperti serbuk) maka difusi dari permukaan ke dalam butir (proses b) berlangsung relatif sangat cepat sehingga tidak mengontrol. Akibatnya yang mengontrol adalah perpindahan massa dari cairan ke permukaan butir. Sebaliknya, jika butir-butir berukuran besar, difusi dari permukaan ke dalam butir relatif sangat lambat, sehingga yang mengontrol adalah proses difusinya.

Pada proses yang dibahas, butir-butir berukuran sangat kecil, sehingga konsentrasi A dalam butir dapat dianggap seragam dan yang mengontrol kecepatan proses adsorpsi adalah perpindahan massa dari cairan ke permukaan butir yang kecepatannya dapat didekati dengan persamaan:

$$N_A \left(\frac{g A}{(waktu)(volum\ bed)} \right) = k_c a (C_A - C_A^*) \quad (3.124)$$

dengan

$$C_A = \text{Konsentrasi } A \text{ dalam cairan}$$

$$C_A^* = \text{Konsentrasi } A \text{ dalam cairan yang setimbang dengan permukaan butir adsorben}$$

Misal hubungan kesetimbangan adsorpsi dapat didekati dengan persamaan yang mirip hukum Henry.

$$C_A^* = H \cdot x_A \quad (3.125)$$

dengan

$$X_A = \text{g } A \text{ teradsorpsi/g adsorben}$$

Rapat massa *bulk* butir-butir adsorben = ρ_b . Porositas bed = ε . Kecepatan air masuk = F volum/waktu. Luas penampang kolom = S . Perpindahan massa A arah aksial dalam kolom terjadi karena dibawa arus ($= F \cdot C_A$) dan difusi aksial ($= -D_e S \frac{\partial C_A}{\partial z}$). Aliran dianggap *plug flow*. Ingin disusun persamaan-persamaan matematis yang bisa dipakai untuk menghitung kadar A dalam cairan di dalam kolom pada berbagai posisi dan waktu, serta kadar A terjerap oleh adsorben pada berbagai posisi aksial dan waktu.

Neraca massa A pada fasa cair dalam elemen volum setebal Δz :

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$\left(-D_e \cdot S \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_z + F \cdot C_A|_z \right) - \left(-D_e \cdot S \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} + F \cdot C_A|_{z+\Delta z} + k_c a (\bar{C}_A - \bar{C}_A^*) \cdot S \cdot \Delta z \right) = S \cdot \Delta z \cdot \varepsilon \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.126)$$

$$\frac{\frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_z}{\Delta z} - \frac{F}{S \cdot D_e} \frac{C_A|_{z+\Delta z} - C_A|_z}{\Delta z} - \frac{k_c a}{D_e} (\bar{C}_A - \bar{C}_A^*) = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.127)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial C_A}{\partial z} \right) - \frac{F}{S.D_e} \frac{\partial C_A}{\partial z} - \frac{k_c a}{D_e} (C_A - C_A^*) = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - \frac{F}{S.D_e} \frac{\partial C_A}{\partial z} - \frac{k_c a}{D_e} (C_A - C_A^*) = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.129)$$

Jika perpindahan massa difusi aksial diabaikan, maka dengan mudah terlihat bahwa suku $\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$ hilang.

Neraca massa A teradsorpsi dalam adsorben dalam elemen volum:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$k_c a (\bar{C}_A - \bar{C}_A^*) \cdot S \cdot \Delta z - 0 = S \cdot \Delta z \cdot \rho_b \frac{\partial X_A}{\partial t} \quad (3.130)$$

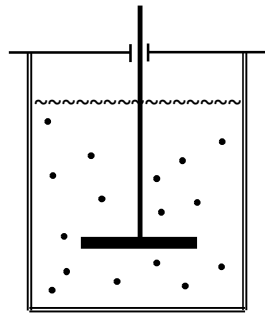
Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, dan dilakukan penyederhanaan, maka diperoleh:

$$\frac{\partial X_A}{\partial t} = \frac{k_c a}{\rho_b} (C_A - C_A^*) \quad (3.131)$$

Jadi diperoleh persamaan diferensial parsial simultan (3.129) dan (3.131) dengan persamaan pelengkap (3.125).

15. Ekstraksi Padat Cair dari Butir-Butir Berbentuk Bola (Neraca Massa, Kestimbangan dan Proses Kecepatan)

Suatu zat A yang terkandung dalam butir-butir berbentuk bola (misalnya minyak dalam biji-bijian) akan diambil dengan ekstraksi menggunakan solven cair (Gambar 3.15).



Gambar 3.15 Ekstraksi padat-cair dalam tangki berpengaduk

Kadar A dalam butir mula-mula C_{A0} . Butir-butir A , berjari-jari R , sebanyak N buah dimasukkan dalam tangki berpengaduk yang berisi V g solven murni, yang melarutkan A . Untuk bisa sampai ke cairan, A dari dalam butir harus mendifusi ke permukaan butir, kemudian berpindah dari permukaan butir ke cairan (perpindahan massa antar fasa). Kecepatan perpindahan massa dari permukaan butir ke cairan mengikuti persamaan:

$$N_A \left(\frac{g^A}{(\text{waktu})(\text{luas})} \right) = k_c (C_f^* - C_f) \quad (3.132)$$

dengan:

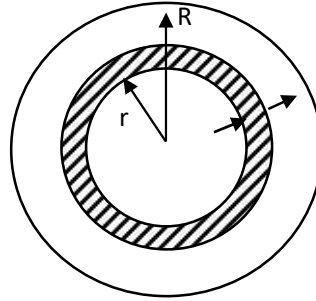
C_f = Kadar A dalam cairan (g A /g solven bebas A)

C_f^* = Kadar A dalam cairan yang setimbang dengan konsentrasi A pada permukaan butir

Hubungan kesetimbangan mengikuti persamaan yang mirip hukum Henry.

$$C_A = H \cdot C_f^* \quad (3.133)$$

Ingin disusun persamaan-persamaan matematis yang bisa dipakai untuk mencari kadar A dalam butir sebagai posisi dan waktu ($C_A = f(r, t)$), serta kadar A dalam cairan sebagai fungsi waktu ($C_f = f(t)$).



Gambar 3.16. Elemen volum dalam butir

Neraca massa A dalam elemen volum dalam butir:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-D_e \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_r \right) - \left(-D_e \cdot 4\pi (r + \Delta r)^2 \cdot \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} \right) = 4\pi \bar{r}^2 \Delta r \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.134)$$

$$\frac{(r+\Delta r)^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} - r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \Big|_r}{\Delta r} = \frac{1}{D_e} (\bar{r})^2 \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.135)$$

Jika diambil $\Delta r \rightarrow 0$ maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) = \frac{1}{D_e} r^2 \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.136)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial C_A}{\partial r} = \frac{1}{D_e} r^2 \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C_A}{\partial r} = \frac{1}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (3.138)$$

Kadaan batas:

$$C_A(r, 0) = C_{A0} \quad (3.139)$$

$$-D_e \cdot \frac{\partial C_A}{\partial r} (R, t) = k_c (C_f^* - C_f) \text{ atau } -D_e \cdot \frac{\partial C_A}{\partial r} (R, t) = k_c \left(\frac{1}{H} C_A(R, t) - C_f \right) \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial r}(0, t) = 0 \quad (\text{kadar } A \text{ di pusat butir maksimum}) \quad (3.141)$$

Untuk bisa menyelesaikan persamaan (3.138) dengan keadaan batas (3.139), (3.140) dan (3.141), masih diperlukan satu persamaan yang menghubungkan C_f dengan C_A . Hubungan antara C_f dengan C_A dapat dicari dengan membuat neraca massa A total:

Massa A dalam butir mula-mula = Massa A dalam butir + Massa A dalam cairan

$$N \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot C_{A0} = N \cdot \int_0^R 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot C_A \cdot dr + V \cdot C_f \quad (3.142)$$

Catatan

Massa A dalam butir (suku pertama ruas kanan) diperoleh dengan pendekatan sebagai berikut:

Misal dalam elemen volum dalam butir berjarak r dari pusat butir dan tebalnya dr terdapat A sebanyak d_{mA} , maka

$$d_{mA} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \cdot C_A \quad (\text{volum} \times \text{kadar}) \quad (3.143)$$

sehingga

$$m_A(\text{massa } A \text{ dalam 1 butir}) = \int_0^R 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot C_A \cdot dr \quad (3.144)$$

Karena butir berjumlah N buah, maka A total adalah

$$= N \cdot \int_0^R 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot C_A \cdot dr \quad (3.145)$$

BAB 4. PENYELESAIAN NUMERIS

Dalam bab ini akan dibahas secara ringkas cara-cara penyelesaian numeris yang sering digunakan dalam penyelesaian problem-problem teknik kimia. Uraian ditekankan pada cara-cara dan rumus-rumus yang diperlukan serta contoh program komputer untuk pelaksanaan hitungannya. Teori dasar serta penjabaran rumus-rumus tidak dibahas, dan pembaca yang tertarik dipersilahkan mempelajari hal itu dari buku-buku yang membahas analisis numeris, misalnya Burden (1985), Press (1986), Jenson and Jeffreys (1977).

1. Diferensiasi Numeris

Misalnya diketahui:

$$y = f(x) \quad (4.1)$$

Dan ingin dicari harga dy/dx pada $x = x_0$. Berdasar definisi matematika:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.2)$$

Pada diferensiasi numeris yang sederhana, harga $\Delta x \rightarrow 0$ didekati dengan bilangan kecil ε sehingga diperoleh rumus-rumus berikut:

Cara *forward*:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \quad (4.3)$$

Cara *backward*:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (4.4)$$

Cara *central*:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0-\varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (4.5)$$

Menurut teori, pendekatan dengan persamaan (4.5) (*central*) adalah yang terbaik.

Contoh program dengan menggunakan MATLAB untuk mencari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan ketiga cara diatas dari persamaan:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad (4.6)$$

pada $x_0 = 2$ adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_41a
clc
clear all
xo = input('Harga Xo      = ');
eps = input('Interval Diferensiasi = ');
fx=inline('x.^3/3+x.^2/4+1','x');
xplus=xo+eps;
xmin=xo-eps;
dydx_forward=(fx(xplus)-fx(xo))/eps;
dydx_backward=(fx(xo)-fx(xmin))/eps;
dydx_central=(fx(xplus)-fx(xmin))/(2*eps);
fprintf('dy/dx pada xo = %2.0f adalah %2.7f (cara forward) \n',xo,dydx_forward);
fprintf('dy/dx pada xo = %2.0f adalah %2.7f (cara backward) \n',xo,dydx_backward);
fprintf('dy/dx pada xo = %2.0f adalah %2.7f (cara central) \n',xo,dydx_central);
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

```

Harga Xo      = 2
Interval Diferensiasi = 0.01
dy/dx pada xo = 2 adalah 5.0225333 (cara forward)
dy/dx pada xo = 2 adalah 4.9775333 (cara backward)
dy/dx pada xo = 2 adalah 5.0000333 (cara central)

```

Sebagai perbandingan, diferensiasi analitis menghasilkan:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_{x=2} = 5$$

2. Integrasi Numeris

Tersedia berbagai cara integrasi numeris, tetapi dalam buku ini hanya dibahas 2 cara, yaitu *trapezoidal rule* dan *Simpson's rule*.

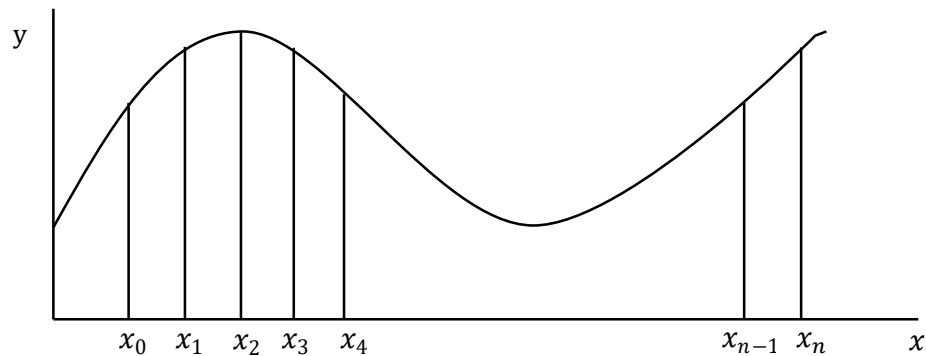
a. Trapezoidal Rule

Misalnya akan dilakukan integrasi:

$$\int_{x_0}^{x_n} y. dx \quad (4.7)$$

Dalam hal ini:

$$y = f(x) \quad (4.8)$$



Gambar 4.1. Integrasi numeris dengan trapezoidal rule

Interval dari $x = x_0$ sampai $x = x_n$ dibagi menjadi bagian-bagian kecil yang masing-masing besarnya Δx , berjumlah n buah (lihat Gambar 4.1). Jumlah interval n semakin besar, hasil integrasi akan semakin baik. Batas-batas interval diberi indeks 0, 1, 2, 3, ..., n . Dengan mudah dapat diperoleh bahwa:

$$x_i = x_0 + i. \Delta x \quad (4.9)$$

Kemudian masing-masing bagian dianggap berbentuk trapesium. Harga integral, yang merupakan luas di bawah kurva dari x_0 sampai x_n didekati dengan jumlahan dari luas trapesium-trapesium tersebut (perlu diingat bahwa luas trapesium adalah $(\frac{1}{2} \times \text{tinggi} \times \text{jumlah sisi sejajar})$). Dengan cara tersebut diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} y. dx = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + y_1) + \frac{\Delta x}{2} (y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{2} (y_2 + y_3) \dots + \frac{\Delta x}{2} (y_{n-1} + y_n) \quad (4.10)$$

atau

$$\int_{x_0}^{x_n} y. dx = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (4.11)$$

Contoh program komputer dengan menggunakan MATLAB untuk integrasi numeris:

$$\int_{x=1}^{x=3} y \cdot dx$$

dengan

$$y = e^x + \sqrt{x} \quad (4.12)$$

adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_42a
clc
clear all
xo = input('Batas bawah interval = ');
xn = input('Batas atas interval = ');
n = input('Jumlah interval    = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
jumx=length(x);
fx=inline('exp(x)+sqrt(x)','x');
fxx=fx(x);
hasil=delx*(fxx(1)+2*sum(fxx(2:(jumx-1)))+fxx(jumx))/2;
disp('Hasil Perhitungan');
disp('-----');
fprintf('Hasil Integrasi = %3.5f\n',hasil);
disp('<< Selesai >>');
end
```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

```

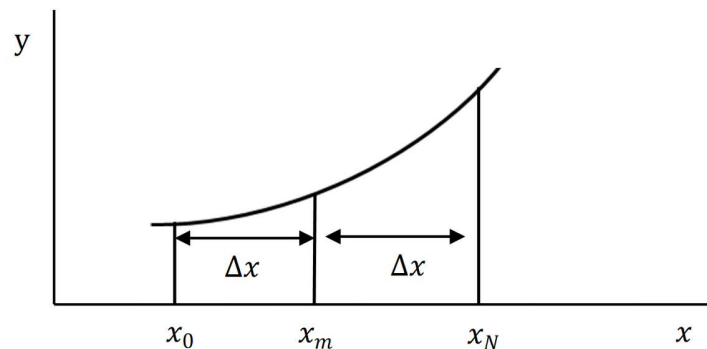
Batas bawah interval  = 1
Batas atas interval    = 3
Jumlah interval        = 40
Hasil Perhitungan
-----
Hasil Integrasi        = 20.16826
<< Selesai >>

```

Sebagai perbandingan, integrasi analitis menghasilkan:

$$\int_{x=1}^{x=3} (e^x + \sqrt{x}) dx = \left(e^x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \Big|_{x=1}^{x=3} = 20,16469$$

b. Simpson's Rule

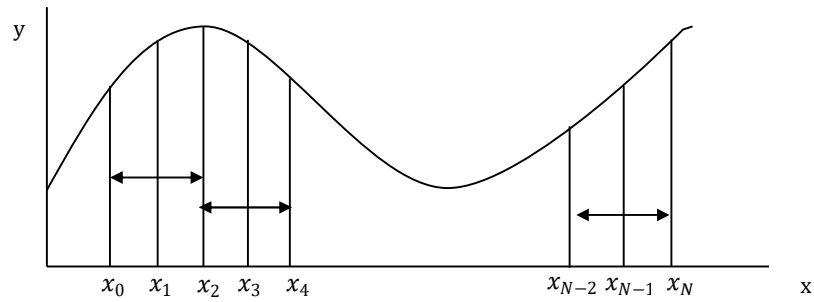


Gambar 4.2. Integrasi numeris cara Simpson

Jika interval tidak begitu besar dan fungsi (kurva) tidak berubah tajam, maka integrasi seperti pada gambar 4.2. dapat didekati dengan rumus Simpson sebagai berikut:

$$\int_{x_0}^{x_N} y \cdot dx = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_m + y_N) \quad (4.13)$$

Jika interval terlalu lebar dan/atau fungsi berubah cukup tajam, maka interval x_0 sampai x_N dibagi menjadi bagian-bagian kecil yang sama besar (Δx), berjumlah N (dengan N = bilangan genap) dan batas-batas interval diberi indeks $0, 1, 2, 3, \dots, N$. Selanjutnya pada tiap 2 interval berurutan dikenakan *Simpson's Rule* (lihat gambar 4.3). Diperoleh:



Gambar 4.3. *Integrasi numeris berturutan cara simpson*

$$\int_{x_0}^{x_N} y \cdot dx = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{\Delta x}{3} (y_4 + 4y_5 + y_6) \dots$$

$$+ \frac{\Delta x}{3} (y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N) \quad (4.14)$$

atau

$$\int_{x_0}^{x_N} y \cdot dx = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N) \quad (4.15)$$

Jadi integral didekati dengan $\frac{\Delta x}{3}$ kali jumlahan dari y , dengan y awal dan akhir dikalikan 1, y nomor ganjil dikalikan 4, sedangkan y nomor genap dikalikan 2.

Contoh program MATLAB untuk integrasi Simpson dari persamaan (4.12) dengan $x_0 = 1$ dan $x_N = 3$ adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_42b
clc
clear all
xo = input('Batas bawah interval = ');
xn = input('Batas atas interval = ');
n = input('Jumlah interval = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
jumx=length(x);
fx=inline('exp(x)+sqrt(x)','x');
fxx=fx(x);
hasil=delx*(fxx(1)+4*sum(fxx(2:2:(jumx-1)))+2*sum(fxx(3:2:(jumx-2)))+fxx(jumx))/3;
disp('Hasil Perhitungan');
disp('-----');
fprintf('Hasil Integrasi = %3.5f\n',hasil);
disp('<< Selesai >>');
end
```

Keluaran program tersebut adalah:

```
Batas bawah interval = 1
Batas atas interval   = 3
Jumlah interval       = 40
Hasil Perhitungan
-----
Hasil Integrasi       = 20.16469
<< Selesai >>
```

Dari perbandingan hasil kedua cara integrasi numeris tersebut dengan hasil integrasi analitis terlihat bahwa, sesuai dengan teori, cara Simpson lebih baik.

Selain menggunakan kedua cara diatas, perhitungan integral dapat pula menggunakan toolbox yang telah tersedia pada MATLAB. Adapun listing program adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_42c
clc
clear all
xa = input('Batas bawah integral = ');
xb = input('Batas atas integral = ');
hitung=quad(@(x) fungsi(x),xa,xb);
disp('-----');
disp('    Hasil perhitungan    ');
disp('-----');
fprintf('Hasil integrasi = %3.5f\n',hitung);
end

function y=fungsi(x)
y=exp(x)+sqrt(x);
end
```

Keluaran program tersebut adalah:

```
Batas bawah integral  = 1
Batas atas integral   = 3
-----
    Hasil perhitungan
-----
Hasil integrasi       = 20.16469
```

3. Mencari Akar Persamaan Non-Linier

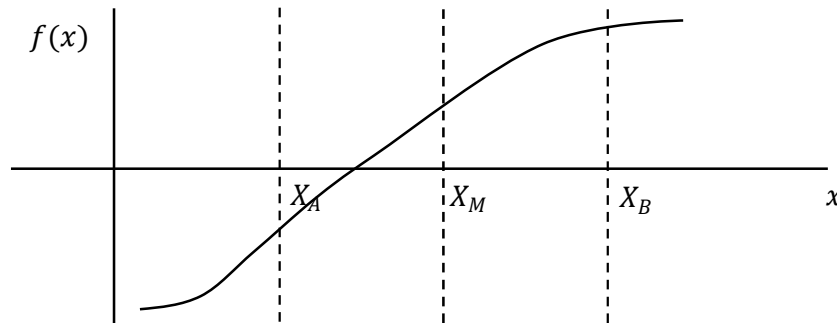
Dalam teknik kimia sering dijumpai persoalan mencari akar persamaan non-linier:

$$f(x) = 0 \quad (4.16)$$

yang sukar diselesaikan dengan manipulasi matematika analitis. Ada beberapa cara numeris yang bisa dipakai untuk kasus ini. Dalam buku ini dibahas 2 cara yaitu *bisection* dan *Newton-Rhapson*.

a. Bisection

Pada cara bisection, mula-mula diperkirakan suatu interval $x_A \leq x \leq x_B$ di mana akar tersebut berada (jika ternyata akar tersebut tidak berada pada interval tersebut, maka cara ini gagal, dan harus dicoba interval yang lain). Selanjutnya dicari harga $f(x)$ pada x_A dan x_B , serta x_M (tengah-tengah interval). Jika interval betul, harga $f(x)$ pada x_A dan x_B harus berlawanan tanda (positif dan negatif atau sebaliknya). Berdasar harga $f(x)$ pada tiga titik tersebut dapat ditentukan pada separuh interval yang mana terletak akar persamaan tersebut (pada interval $x_A \leq x \leq x_M$ atau $x_M \leq x \leq x_B$). Akar tersebut pasti terletak pada interval dimana tanda dari $f(x)$ pada ujung-ujung interval berlawanan (Gambar 4.4).



Gambar 4.4. *Bisection method*

Jika tanda $f(x_M)$ berlawanan dengan $f(x_A)$, maka akar persamaan pasti berada pada interval $x_A \leq x \leq x_M$, sedangkan jika $f(x_M)$ berlawanan tanda dengan $f(x_B)$, maka akar persamaan pasti berada pada interval $x_M \leq x \leq x_B$. Jadi interval bisa diperkecil dengan membuang separuh interval. Selanjutnya proses yang sama dikenakan pada interval yang baru. Demikian seterusnya sampai diperoleh interval yang cukup kecil. Akar persamaan selanjutnya bisa didekati dengan:

$$x = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \quad (4.17)$$

Cara ini tidak begitu cepat konvergen, tetapi baik digunakan untuk fungsi-fungsi yang sangat tajam perubahannya.

Pedoman praktis untuk eliminasi interval adalah sebagai berikut:

1. Jika $f(x_A) \cdot f(x_M) < 0$, maka x_A tetap, x_M menjadi x_B
2. Jika $f(x_M) \cdot f(x_B) < 0$, maka x_B tetap, x_M menjadi x_A

Suatu contoh program komputer dengan menggunakan MATLAB untuk mencari akar persamaan:

$$f(x) = x^3 - 8 = 0 \quad (4.18)$$

adalah sebagai berikut:

```
disp('-----');
fprintf('Akar persamaan = %2.3f\n',xb);
fprintf('F(x)      = %2.3f\n',fxb);
else
    ulang=1;
    while ulang==1
        xm=(xa+xb)/2;
        fxm=fx(xm);
        if abs(xa-xb)<=tol
            break;
        elseif (fxm*fxa)<0
            xb=xm;
            fxb=fxm;
            fprintf(' %2.6f %2.6f %2.6f %2.6f\n',xa,xb,fxa,fxb);
        else
            xa=xm;
            fxa=fxm;
            fprintf(' %2.6f %2.6f %2.6f %2.6f\n',xa,xb,fxa,fxb);
        end
    end
    disp('-----');
    fprintf('Akar persamaan = %2.6f\n',xm);
    fprintf('F(x)      = %2.3e\n',fxm);
end
disp('-----');
end
end
```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

Batas bawah interval = 1
 Batas atas interval = 6
 Toleransi = 0.0001
 Hasil Perhitungan

xa	xb	fxa	fxb
1.000000	6.000000	-7.000000	208.000000
1.000000	3.500000	-7.000000	34.875000
1.000000	2.250000	-7.000000	3.390625
1.625000	2.250000	-3.708984	3.390625
1.937500	2.250000	-0.726807	3.390625
1.937500	2.093750	-0.726807	1.178558
1.937500	2.015625	-0.726807	0.188969
1.976563	2.015625	-0.277967	0.188969
1.996094	2.015625	-0.046784	0.188969
1.996094	2.005859	-0.046784	0.070519
1.996094	2.000977	-0.046784	0.011724
1.998535	2.000977	-0.017565	0.011724
1.999756	2.000977	-0.002929	0.011724
1.999756	2.000366	-0.002929	0.004395
1.999756	2.000061	-0.002929	0.000732
1.999908	2.000061	-0.001099	0.000732
1.999985	2.000061	-0.000183	0.000732
Akar persamaan		= 2.000023	
F(x)		= 2.747e-04	

b. Newton Rhapson

Mula-mula diperkirakan suatu harga x (misalnya x_{old}) yang memenuhi persamaan (4.16), kemudian berdasar harga tersebut bisa diperkirakan harga x yang lebih baik, yaitu x_{new} dengan persamaan:

$$x_{new} = x_{old} - \frac{f(x_{old})}{f'(x_{old})} \quad (4.19)$$

Selanjutnya harga x_{new} dipakai sebagai x_{old} dan dicari harga yang lebih baik lagi (x_{new}). Demikian seterusnya sampai diperoleh harga x yang cukup baik, yang ditandai dengan harga x_{new} mendekati harga x_{old} atau harga $f(x_{new}) \approx 0$. Cara Newton Raphson lebih cepat

convergen dibandingkan dengan bisection, tetapi sering gagal untuk fungsi yang berubah sangat tajam.

Misal ingin dicari akar dari persamaan (4.18)

$$f(x) = x^3 - 8 = 0 \quad (4.18)$$

Diferensiasi analitis memberikan:

$$f'(x) = 3x^2$$

Dipilih $x_{old} = 1$. Contoh program Newton Rhapson dengan diferensiasi analitis adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_43b
clc
clear all
xold = input('Tebakan awal      = ');
tol = input('Toleransi      = ');
fx=inline('x.^3-8','x');
dfdx=inline('3*x.^2','x');
fxold=fx(xold);
dfdxold=dfdx(xold);
disp('-----');
disp('  xold      fxold  ');
disp('-----');
fprintf(' %2.6f   %2.6f\n',xold,fxold);
if fxold==0
    disp('-----');
    fprintf('Akar persamaan = %2.3f\n',xold);
    fprintf('F(x)      = %2.3f\n',fxold);
    disp('-----');
```

```

else
    ulang=1;
    while ulang==1
        xnew=xold-fxold/dfdxold;
        fxnew=fx(xnew);
        dfdxnew=dfdx(xnew);
        if abs(xold-xnew)<=tol
            disp('-----');
            fprintf('Akar persamaan = %2.3f \n',xnew);
            fprintf('F(x)          = %2.3f \n',fxnew);
            disp('-----');
            break;
        else
            xold=xnew;
            fxold=fxnew;
            dfdxold=dfdxnew;
            fprintf(' %2.6f  %2.6f \n',xold,fxold);
        end
    end
end
end

```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

```

Tebakan awal      = 1
Toleransi         = 0.0001
-----
    xold    fxold
-----
    1.000000 -7.000000
    3.333333 29.037037
    2.462222  6.927316
    2.081341  1.016332
    2.003137  0.037709
    2.000005  0.000059
-----
Akar persamaan    = 2.000
F(x)              = 0.000
-----

```

Jika $f'(x)$ sukar dicari dengan analitis, bisa dipakai diferensiasi numeris, misal cara sentral

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

Contoh program Newton Rhapson dengan diferensiasi numeris adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_43c
clc
clear all
xold = input('Tebakan awal      = ');
tol = input('Toleransi          = ');
eps = input('Interval diferensiasi = ');
fx=inline('x.^3-8','x');
fxold=fx(xold);
dfdxold=hitungdydx(fx,xold,eps);
disp('-----');
disp('  xold      fxold  ');
disp('-----');
fprintf(' %2.6f   %2.6f \n',xold,fxold);
if fxold==0
    disp('-----');
    fprintf(' Akar persamaan = %2.3f \n',xold);
    fprintf(' F(x)          = %2.3f \n',fxold);
    disp('-----');
else
    ulang=1;
    while ulang==1
        xnew=xold-fxold/dfdxold;
        fxnew=fx(xnew);
        if abs(xold-xnew)<=tol
            disp('-----');
            fprintf(' Akar persamaan = %2.3f \n',xnew);
            fprintf(' F(x)          = %2.3f \n',fxnew);
            disp('-----');
            break;
        else
            xold=xnew;
            fxold=fxnew;
            dfdxold=hitungdydx(fx,xold,eps);
            fprintf(' %2.6f   %2.6f \n',xold,fxold);
        end
    end
end
```

```

end
end
end

function dfdx=hitungdydx(fx,xold,eps)
fxplus=fx(xold+eps);
fxmin=fx(xold-eps);
dfdx=(fxplus-fxmin)/(2*eps);
end

```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

```

Tebakan awal      = 1
Toleransi         = 0.0001
Interval diferensiasi = 0.0001
-----
      xold      fxold
-----
1.000000  -7.000000
3.333333  29.037037
2.462222  6.927316
2.081341  1.016332
2.003137  0.037709
2.000005  0.000059
-----
Akar persamaan    = 2.000
F(x)              = 0.000
-----

```

Selain dengan menggunakan cara diatas, penyelesaian persamaan non-linear dapat pula diselesaikan dengan toolbox **fzero** dari MATLAB seperti pada listing berikut:

```

function Latihan_43d
clc
clear all
x = input('Tebakan awal = ');
[xhit,fxhit]=fzero(@(x) fungsi(x),x);
disp('-----');
disp('    Hasil perhitungan    ');
disp('-----');
fprintf('Akar persamaan = %2.3f \n',xhit);
fprintf('F(x)          = %2.3f \n',fxhit);
end

function y=fungsi(x)
y=x^3-8;
end

```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

```

Tebakan awal = 1
-----
    Hasil perhitungan
-----
Akar persamaan      = 2.000
F(x)                = 0.000

```

4. Optimasi Satu Variabel dengan Cara Golden Section

Optimasi dapat diartikan sebagai suatu proses untuk mencari kondisi yang optimum, dalam arti paling menguntungkan. Optimasi bisa berupa maksimasi atau minimasi. Bila kita berhadapan dengan masalah keuntungan, keadaan yang optimum adalah keadaan yang memberikan keuntungan maksimum (maksimasi), sedangkan bila berhadapan dengan masalah pengeluaran/pengorbanan, keadaan yang optimum adalah keadaan yang memberikan pengeluaran/pengorbanan minimum (minimasi). Secara umum, fungsi yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan disebut sebagai objective function sedangkan harga-harga yang berpengaruh dan bisa dipilih disebut variabel (peubah).

Secara analitis, nilai maksimum atau minimum dari suatu persamaan:

$$y = f(x) \quad (4.20)$$

dapat diperoleh pada harga x yang memenuhi

$$y'(x) = f'(x) = 0 \quad (4.21)$$

Untuk fungsi yang sukar untuk diturunkan atau mempunyai turunan yang sukar dicari akarnya, proses optimasi dapat dilakukan secara numeris.

Golden section merupakan salah satu cara optimasi numeris yang bisa dipakai untuk fungsi yang bersifat unimodal (Rudd and Watson, 1968). Kedua tipe optimasi, yaitu maksimasi dan minimasi dapat diselesaikan dengan cara ini.

Misal akan dilakukan maksimasi terhadap persamaan (4.20) dalam interval x_A sampai x_B . Dipilih 2 titik untuk evaluasi, misal x_P dan x_Q . Diharapkan dengan berdasar harga y pada 2 titik tersebut maka ada sebagian interval yang dapat dieliminasi. Diharapkan pula bahwa pada evaluasi langkah selanjutnya, salah satu titik lama bisa dipakai lagi. Jadi hanya diperlukan 1 titik baru. Proses eliminasi interval terlihat seperti pada Gambar 4.5.

Disini ada problem, dimana letak titik P dan Q agar pada interval berikutnya, salah satu titiknya masih bisa dipakai. Misal titik P dan Q masing-masing berjarak l x interval awal dari titiknya B dan A . Dalam hal ini harga l akan dicari.

Dari gambar 4.5 terlihat bahwa:

$$(x_Q - x_P)_{lama} = (x_P - x_A)_{baru}$$

Selanjutnya:

$$\{l - (1 - l)\}(x_B - x_A)_{lama} = \{1 - l\}(x_B - x_A)_{baru}$$

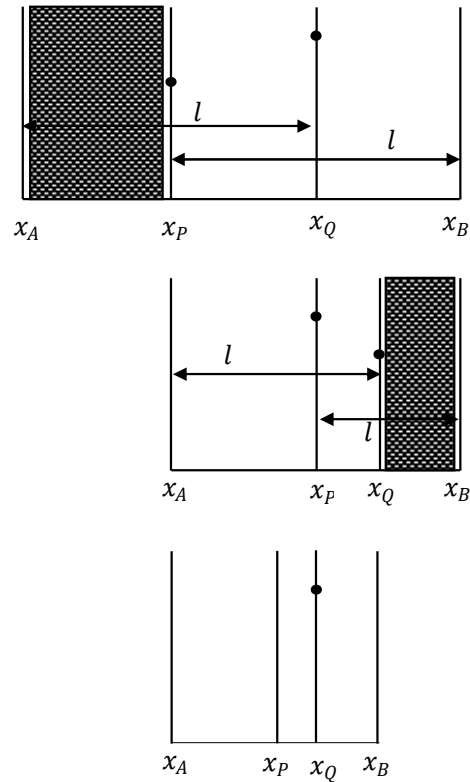
$$\{2l - 1\}(x_B - x_A)_{lama} = \{(1 - l) \cdot l\}(x_B - x_A)_{lama}$$

$$2l - 1 = l - l^2$$

$$l^2 + l - 1 = 0$$

$$l = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

(4.22)



Gambar 4.5. *Eliminasi dengan golden section*

Kemungkinan-kemungkinan yang terjadi pada eliminasi dengan cara Golden Section adalah:

$$\begin{aligned} \text{Maksimasi:} \quad y_P < y_Q &\rightarrow x_A = x_P \\ &x_P = x_Q \\ &x_B = x_B \\ &x_Q = \text{dicari} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
y_P > y_Q \rightarrow & x_A = x_A \\
& x_B = x_Q \\
& x_Q = x_P \\
& x_P = \text{dicari} \\
\text{Minimasi: } y_P < y_Q \rightarrow & x_A = x_A \\
& x_B = x_Q \\
& x_Q = x_P \\
& x_P = \text{dicari} \\
y_P > y_Q \rightarrow & x_A = x_P \\
& x_P = x_Q \\
& x_B = x_B \\
& x_Q = \text{dicari}
\end{array}$$

Efektivitas evaluasi:

Misal diinginkan pengecilan interval sampai menjadi 0,001 dari semula, maka jumlah step yang diperlukan (N) adalah:

$$0,618^N = 0,001$$

$$N = 14,3 \approx 15 \quad (4.23)$$

$$\text{Jumlah evaluasi} = 2 + (N - 1) \times 1 = 16$$

Contoh program komputer dengan MATLAB untuk minimasi:

$$y = 2x^2 - 8x + 12 \quad (4.24)$$

adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_44
clc
clear all
xa = input('Batas bawah = ');
xb = input('Batas atas = ');
tol = input('Toleransi = ');
fx=inline('2*x.^2-8*x+12','x');
al=(sqrt(5)-1)/2;
xp=xa+(1-al)*(xb-xa);
xq=xa+al*(xb-xa);

```

```

x=[xa; xb; xp; xq];
fxhit=fx(x);
fxa=fxhit(1);
fxb=fxhit(2);
fxp=fxhit(3);
fxq=fxhit(4);
disp('-----');
disp('  xa      xb      fxa      fxb ');
disp('-----');
ulang=1;
while ulang==1
    fprintf(' %2.6f  %2.6f  %2.6f  %2.6f \n',xa,xb,fxa,fxb);
    if abs(xb-xa)<=tol
        xopt=(xb+xa)/2;
        fopt=fx(xopt);
        disp('-----');
        fprintf('X - Optimum  = %2.3f \n',xopt);
        fprintf('F(x)      = %2.3f \n',fopt);
        disp('-----');
        break;
    else
        if fxp<fxq
            xb=xq;
            fxb=fxq;
            xq=xp;
            fxq=fxp;
            xp=xa+(1-al)*(xb-xa);
            fxp=fx(xp);
        else
            xa=xp;
            fxa=fxp;
            xp=xq;
            fxp=fxq;
            xq=xa+al*(xb-xa);
            fxq=fx(xq);
        end
    end
end
end
end

```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

Batas bawah	= 0		
Batas atas	= 4		
Toleransi	= 0.001		

xa	xb	fxa	fxb

0.000000	4.000000	12.000000	12.000000
1.527864	4.000000	4.445825	12.000000
1.527864	3.055728	4.445825	6.229124
1.527864	2.472136	4.445825	4.445825
1.888544	2.472136	4.024845	4.445825
1.888544	2.249224	4.024845	4.124225
1.888544	2.111456	4.024845	4.024845
1.973689	2.111456	4.001385	4.024845
1.973689	2.058834	4.001385	4.006923
1.973689	2.026311	4.001385	4.001385
1.993789	2.026311	4.000077	4.001385
1.993789	2.013889	4.000077	4.000386
1.993789	2.006211	4.000077	4.000077
1.998534	2.006211	4.000004	4.000077
1.998534	2.003279	4.000004	4.000021
1.998534	2.001466	4.000004	4.000004
1.999654	2.001466	4.000000	4.000004
1.999654	2.000774	4.000000	4.000001
1.999654	2.000346	4.000000	4.000000

X - Optimum	= 2.000		
F(x)	= 4.000		

Jika dihitung secara analitis, nilai optimum dari fungsi tersebut diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 8 = 0 \quad (4.25)$$

atau pada $x = 2$, yaitu:

$$y = 2 \cdot (2)^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 4$$

Program komputer untuk maksimasi cara *Golden Section* dapat dibuat mirip dengan minimasi, hanya tanda < pada perintah **if fxp<fxq** diganti tanda >.

MATLAB menyediakan toolbox **fminbnd** yang dapat digunakan untuk melakukan perhitungan optimasi satu variabel. Contoh program computernya disajikan sebagai berikut:

```
function Latihan_44a
clc
clear all
xa = input('Batas bawah = ');
xb = input('Batas atas = ');

[xopt,fopt]=fminbnd(@(x) fungsi(x),xa,xb);
disp('-----');
fprintf('X - Optimum   = %2.3f \n',xopt);
fprintf('F(x)          = %2.3f \n',fopt);
disp('-----');
end

function y=fungsi(x)
y=2*x^2-8*x+12;
end
```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

```
Batas bawah   = 0
Batas atas    = 4
-----
X - Optimum   = 2.000
F(x)          = 4.000
-----
```

5. Optimasi Banyak Variabel dengan Cara Hooke-Jeeves

Misalnya diketahui sebuah fungsi dengan banyak variabel sebagai berikut:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (4.26)$$

Ingin dicari harga $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ yang memberikan harga y maksimum (maksimasi) atau minimum (minimasi). Ada beberapa cara untuk mencari nilai optimum, diantaranya adalah cara Klasik, cara *Steepest Ascending/Descending* dan cara *Hooke-Jeeves* (Rudd and Watson, 1968). Dalam bab ini hanya akan dibahas cara *Hooke-Jeeves*.

Optimasi dengan cara ini ditunjukkan dengan contoh soal berikut. Misal ingin dilakukan minimasi dari suatu fungsi:

$$y = (x_1 - 4)^2 + 0,5(x_2 - 9)^2 + 3$$

Sebagai cek, dengan mudah dapat terlihat bahwa minimum terjadi pada $x_1 = 4, x_2 = 9$ dan harga $y_{min} = 3$. Dipakai cara *Hooke-Jeeves* dengan titik awal $x_1 = 1, x_2 = 16$ dan interval awal $\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 2$.

x_1	x_2	y	komentar
1	16	36,6	Basis
Eksplorasi dengan $\Delta x_1 = 1; \Delta x_2 = 2$			
2	16	31,5	Sukses
2	18	47,5	Gagal
2	14	19,5	Sukses
Mengulangi Langkah Sukses			
3	12	8,5	Sukses
4	10	3,5	Sukses
5	8	4,5	Gagal
Eksplorasi dengan $\Delta x_1 = 1; \Delta x_2 = 2$			
5	10	4,5	Gagal
3	10	4,5	Gagal
4	12	7,5	Gagal
4	8	3,5	Gagal
Eksplorasi dengan $\Delta x_1 = 0,2; \Delta x_2 = 0,4$			
4,2	10	3,54	Gagal

3,8	10	3,54	Gagal
4	10,4	4,96	Gagal
4	9,6	3,18	Sukses
Mengulangi Langkah Sukses			
4	9,2	3,02	Sukses
4	8,8	3,02	Gagal
Eksplorasi dengan $\Delta x_1 = 0,2$; $\Delta x_2 = 0,4$			
4,2	9,2	3,06	Gagal
3,8	9,2	3,06	Gagal
4	9,6	3,18	Gagal
4	8,8	3,02	Gagal
Eksplorasi dengan $\Delta x_1 = 0,04$; $\Delta x_2 = 0,08$			
4,04	9,2	3,021	Gagal
3,96	9,2	3,021	Gagal
4	9,28	3,039	Gagal
4	9,12	3,007	Sukses
Mengulangi Langkah Sukses			
4	9,04	3,0008	Sukses
4	8,96	3,0008	Gagal

Eksplorasi dihentikan setelah eksplorasi gagal serta Δx_1 dan Δx_2 cukup kecil.

Berikut ini disajikan program komputer untuk minimasi persamaan:

$$y = (x_1 - 3)^2 + 0,25(x_2 - 5)^2 + 7,5$$

dengan titik awal $x_1 = 1, x_2 = 7$; $\Delta x_1 = 0,1$; $\Delta x_2 = 0,1$; toleransi $x_1 = 0,001$ dan toleransi $x_2 = 0,001$.

```

function Latihan_45
clc
clear all
x1opt=input('Harga awal x1          = ');
x2opt=input('Harga awal x2          = ');
delx1=input('Delta x1              = ');
delx2=input('Delta x2              = ');
tolx1=input('Toleransi x1          = ');
tolx2=input('Toleransi x2          = ');
rasio=input('Perbandingan delta baru dan delta lama = ');
fx=inline('(x1-3)^2+0.25*(x2-5)^2+7.5','x1','x2');
fopt=fx(x1opt,x2opt);
disp('-----');
disp('  x1      x2      f(x1,x2)  ');
disp('-----');
fprintf(' %2.6f  %2.6f  %2.6f \n',x1opt,x2opt,fopt);
ulang1=1;
while ulang1==1
    tanda1=0;
    tanda2=0;
    x1=x1opt+delx1;
    x2=x2opt;
    f=fx(x1,x2);
    if f>=fopt
        x1=x1opt-delx1;
        f=fx(x1,x2);
        if f<fopt
            fopt=f;
            x1opt=x1;
            tanda1=-1;
            fprintf(' %2.6f  %2.6f  %2.6f \n',x1opt,x2opt,fopt);
        end
    else
        fopt=f;
        x1opt=x1;
        tanda1=1;
        fprintf(' %2.6f  %2.6f  %2.6f \n',x1opt,x2opt,fopt);
    end
    x1=x1opt;
    x2=x2opt+delx2;
    f=fx(x1,x2);
    if f>=fopt
        x2=x2opt-delx2;
        f=fx(x1,x2);

```

```

    if f<fopt
        fopt=f;
        x2opt=x2;
        tanda2=-1;
        fprintf(' %2.6f %2.6f %2.6f\n',x1opt,x2opt,fopt);
    end
else
    fopt=f;
    x2opt=x2;
    tanda2=1;
    fprintf(' %2.6f %2.6f %2.6f\n',x1opt,x2opt,fopt);
end
if abs(tanda1)>0.2 || abs(tanda2)>0.2
    ulang2=1;
    while ulang2==1
        x1=x1opt+delx1*tanda1;
        x2=x2opt+delx2*tanda2;
        f=fx(x1,x2);
        if f>=fopt
            ulang2=0;
        else
            x1opt=x1;
            x2opt=x2;
            fopt=f;
        end
    end
else
    if (delx1<tolx1) && (delx2<tolx2)
        f=fx(x1opt,x2opt);
        disp('-----');
        disp('          Hasil Perhitungan          ');
        disp('-----');
        fprintf('x1 - optimum = %2.4f\n',x1opt);
        fprintf('x2 - optimum = %2.4f\n',x2opt);
        fprintf('F - minimum = %2.4f\n',f);
        disp('-----');
        break;
    else
        delx1=rasio*delx1;
        delx2=rasio*delx2;
    end
end
end
end
end

```


Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

Harga awal x1 = 7
Harga awal x2 = 7
Delta x1 = 0.3
Delta x2 = 0.3
Toleransi x1 = 0.001
Toleransi x2 = 0.001
Perbandingan delta baru dan delta lama = 0.6

x1	x2	f(x1,x2)
7.000000	7.000000	24.500000
6.700000	7.000000	22.190000
6.700000	6.700000	21.912500
3.100000	3.400000	8.150000
3.100000	3.700000	7.932500
3.100000	4.000000	7.760000
3.100000	4.300000	7.632500
3.100000	4.600000	7.550000
2.920000	4.900000	7.508900
2.920000	5.080000	7.508000
3.028000	5.080000	7.502384
3.028000	4.972000	7.500980
2.989120	4.972000	7.500314
2.989120	5.010880	7.500148
3.003117	5.010880	7.500039
3.003117	4.996883	7.500012
2.998078	4.996883	7.500006
2.998078	5.001922	7.500005
3.001101	5.001922	7.500002
3.001101	4.998899	7.500002
2.999287	4.998899	7.500001
2.999287	5.000713	7.500001
3.000376	5.000713	7.500000
3.000376	4.999624	7.500000
2.999723	4.999624	7.500000
2.999723	5.000277	7.500000

Hasil Perhitungan

x1 - optimum = 2.9997
x2 - optimum = 5.0003
F - minimum = 7.5000

Cara analitis memberikan $(x_1)_{opt} = 3$, $(x_2)_{opt} = 5$ dan $y_{minimum} = 7,5$.

Jika dijumpai minimasi dengan lebih banyak variabel, caranya analog. Pada maksimasi, caranya juga analog, hanya kriterium sukses dan gagal dibalik.

Selain dengan menggunakan cara diatas, proses perhitungan optimasi multi variabel dapat pula diselesaikan dengan menggunakan toolbox **fminsearch**. Adapun listing programnya adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_45a
clc
clear all
x1opt=input('Harga awal x1          = ');
x2opt=input('Harga awal x2          = ');
x=[x1opt,x2opt];
[xopt,fopt]=fminsearch(@(x) fungsi(x),x);

disp('-----');
disp('          Hasil Perhitungan          ');
disp('-----');
fprintf('x1 - optimum = %2.4f \n',xopt(1));
fprintf('x2 - optimum = %2.4f \n',xopt(2));
fprintf('F - minimum = %2.4f \n',fopt);
disp('-----');
end

function y=fungsi(x)
y=(x(1)-3)^2+0.25*(x(2)-5)^2+7.5;
end
```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

```
Harga awal x1          = 7
Harga awal x2          = 7
-----
          Hasil Perhitungan
-----
x1 - optimum = 3.0000
x2 - optimum = 5.0000
F - minimum = 7.5000
-----
```

6. Penyelesaian Persamaan Linier Simultan

Bentuk umum persamaan linier simultan adalah:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \quad (4.29)$$

Dalam hal ini akan dicari harga $x_1, x_2, x_3 \dots \dots, x_n$. Ada beberapa cara penyelesaian persamaan ini. Pada bab ini hanya akan dibahas satu cara, yaitu cara *Eliminasi Gauss* dengan *maximum column pivoting* yang diikuti dengan substitusi balik (*backward substitution*). Dengan Eliminasi Gauss, persamaan (4.29) diubah menjadi bentuk matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- 1) Eliminasi $a_{21}, a_{31}, a_{41}, \dots \dots + a_{n1}$ (kolom 1)

Baris 1 dikalikan $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, kemudian dikurangkan ke baris 2.

Baris 1 dikalikan $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, kemudian dikurangkan ke baris 3.

·
·

Baris 1 dikalikan $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$, kemudian dikurangkan ke baris n.

- 2) Eliminasi $a_{32}, a_{42}, a_{52}, \dots \dots + a_{n2}$ (kolom 2)

Baris 2 dikalikan $\frac{a_{32}}{a_{22}}$, kemudian dikurangkan ke baris 3.

Baris 2 dikalikan $\frac{a_{42}}{a_{22}}$, kemudian dikurangkan ke baris 4.

·
·

Baris 2 dikalikan $\frac{a_{n2}}{a_{22}}$, kemudian dikurangkan ke baris n.

- 3) Proses yang sama dikenakan untuk kolom selanjutnya sampai kolom n-1

Dari proses eliminasi diperoleh persamaan berbentuk *upper triangular matrix* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots & + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{33}x_3 + \dots \dots + a_{3n}x_n & = b_3 \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n & = b_{n-2} \\
a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = b_{n-1} \\
a_{n,n}x_n & = b_n
\end{aligned}
\tag{4.30}$$

Setelah itu harga $x_1, x_2, x_3 \dots \dots, x_n$ dihitung dengan *backward substitution* seperti berikut:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \tag{4.31}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \tag{4.32}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}} \tag{4.33}$$

·
·
·

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \dots - a_{i,n}x_n}{a_{i,i}} \\
x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}
\end{aligned}
\tag{4.34}$$

·
·
·

Dan seterusnya sampai x_1

Cara ini mempunyai kelemahan, yaitu:

1. Jika pada saat eliminasi kolom ke i harga $a_{ii} = 0$, maka proses tidak dapat berjalan.
2. Jika pada saat eliminasi kolom ke i harga $|a_{ii}|$ mendekati nol atau sangat kecil, maka ketelitian hitungan akan rendah

Kedua kelemahan tersebut dapat diatasi dengan *maximum column pivoting*. Pada saat akan melakukan eliminasi kolom ke i , dicari di antara harga $a_{i,i}, a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{n,i}$ yang mempunyai harga mutlak terbesar. Misal diperoleh $a_{k,i}$. Selanjutnya baris ke i ditukar dengan baris ke k , baru dilakukan eliminasi kolom i .

Contoh program komputer untuk bentuk umum untuk persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = -1$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 7$$

$$x_2 - x_3 + 2x_5 = -9$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2$$

adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_46a
clc
clear all
n = input('Banyaknya variabel = ');
for i=1:n
    for j=1:n
        fprintf('a(%1.0f, %1.0f) = ',i,j);
        a(i,j) = input('');
    end
    fprintf('b(%1.0f) = ',i);
    b(i) = input('');
end
for i=1:(n-1)
    imax=i;
    for ipvi=(i+1):n
        if abs(a(ipvi,i))>abs(a(imax,i))
            imax=ipvi;
        end
    end
end
```

```

for l=1:n
    asimp=a(i,l);
    a(i,l)=a(imax,l);
    a(imax,l)=asimp;
end
bsimp=b(i);
b(i)=b(imax);
b(imax)=bsimp;
for ibar=i+1:n
    rasio=a(ibar,i)/a(i,i);
    for ikol=i:n
        a(ibar,ikol)=a(ibar,ikol)-rasio*a(i,ikol);
    end
    b(ibar)=b(ibar)-rasio*b(i);
end
end
x(n)=b(n)/a(n,n);
for i=(n-1):-1:1
    jx=0;
    for j=i+1:n
        jx=jx+a(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(b(i)-jx)/a(i,i);
end
disp('-----');
disp('    Hasil Perhitungan    ');
disp('-----');
for i=1:n
    fprintf('x(%1.0f) = %1.4f \n',i,x(i));
end
end

```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

Banyaknya variabel = 5

$$a(1, 1) = 1$$

$$a(1, 2) = 1$$

$$a(1, 3) = 1$$

$$a(1, 4) = 1$$

$$a(1, 5) = 1$$

$$b(1) = 2$$

$$a(2, 1) = 1$$

$$a(2, 2) = 0$$

$$a(2, 3) = 2$$

$$a(2, 4) = -1$$

$$a(2, 5) = 1$$

$$b(2) = -1$$

$$a(3, 1) = 2$$

$$a(3, 2) = -1$$

$$a(3, 3) = -1$$

$$a(3, 4) = 1$$

$$a(3, 5) = -1$$

$$b(3) = 7$$

$$a(4, 1) = 0$$

$$a(4, 2) = 1$$

$$a(4, 3) = -1$$

$$a(4, 4) = 0$$

$$a(4, 5) = 2$$

$$b(4) = -9$$

$$a(5, 1) = 1$$

$$a(5, 2) = 2$$

$$a(5, 3) = 1$$

$$a(5, 4) = -1$$

$$a(5, 5) = 0$$

$$b(5) = -2$$

Hasil Perhitungan

$$x(1) = 1.0000$$

$$x(2) = -1.0000$$

$$x(3) = 2.0000$$

$$x(4) = 3.0000$$

$$x(5) = -3.0000$$

Cara lain yang dapat digunakan dalam penyelesaian kasus yang melibatkan matriks adalah menggunakan *left division* (*backslash*) yang disimbolkan dengan \ atau *right division* (*slash*) yang disimbolkan dengan /. Contoh program penggunaan *slash* adalah sebagai berikut

```
function Latihan_46aa
clc
clear all
n = input('Banyaknya variabel = ');
for i=1:n
    for j=1:n
        fprintf('a(%1.0f, %1.0f) = ',i,j);
        a(i,j) = input("");
    end
    fprintf('b(%1.0f) = ',i);
    b(i) = input("");
end
x=b/a';
disp('-----');
disp('    Hasil Perhitungan    ');
disp('-----');
for i=1:n
    fprintf('x(%1.0f) = %1.4f \n',i,x(i));
end
disp('-----');
end
```


Keluaran hitungan adalah sebagai berikut:

Banyaknya variabel = 5

$$a(1, 1) = 1$$

$$a(1, 2) = 1$$

$$a(1, 3) = 1$$

$$a(1, 4) = 1$$

$$a(1, 5) = 1$$

$$b(1) = 2$$

$$a(2, 1) = 1$$

$$a(2, 2) = 0$$

$$a(2, 3) = 2$$

$$a(2, 4) = -1$$

$$a(2, 5) = 1$$

$$b(2) = -1$$

$$a(3, 1) = 2$$

$$a(3, 2) = -1$$

$$a(3, 3) = -1$$

$$a(3, 4) = 1$$

$$a(3, 5) = -1$$

$$b(3) = 7$$

$$a(4, 1) = 0$$

$$a(4, 2) = 1$$

$$a(4, 3) = -1$$

$$a(4, 4) = 0$$

$$a(4, 5) = 2$$

$$b(4) = -9$$

$$a(5, 1) = 1$$

$$a(5, 2) = 2$$

$$a(5, 3) = 1$$

$$a(5, 4) = -1$$

$$a(5, 5) = 0$$

$$b(5) = -2$$

Hasil Perhitungan

$$x(1) = 1.0000$$

$$x(2) = -1.0000$$

$$x(3) = 2.0000$$

$$x(4) = 3.0000$$

$$x(5) = -3.0000$$

Suatu bentuk khusus dari persamaan linier simultan adalah persamaan matriks tridiagonal berikut (matriks yang isinya hanya pada tiga diagonal utama):

$$\begin{array}{rcl}
 b_1x_1 + c_1x_2 & = d_1 \\
 a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2 \\
 a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 & = d_3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{N-1}x_{N-2} + b_{N-1}x_{N-1} + c_{N-1}x_N & = d_{N-1} \\
 a_Nx_{N-1} + b_Nx_N & = d_N
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} b_1x_1 + c_1x_2 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N-1}x_{N-2} + b_{N-1}x_{N-1} + c_{N-1}x_N \\ a_Nx_{N-1} + b_Nx_N \end{array}} \right\} \quad 4.35$$

Bentuk ini dapat diselesaikan dengan cara umum di muka, namun lebih mudah diselesaikan dengan cara khusus yaitu eliminasi a diikuti *backward substitution*.

Eliminasi harga-harga a :

Baris 1 dikalikan $\frac{a_2}{b_1}$, kemudian dikurangkan ke baris 2.

Baris 2 dikalikan $\frac{a_3}{b_2}$, kemudian dikurangkan ke baris 3.

Baris 3 dikalikan $\frac{a_4}{b_3}$, kemudian dikurangkan ke baris 4.

·
·

Baris $n - 1$ dikalikan $\frac{a_n}{b_{n-1}}$, kemudian dikurangkan ke baris n .

Dari eliminias diatas akan terbentuk persamaan matriks didiagonal:

$$\begin{array}{rcl}
 b_1x_1 + c_1x_2 & = d_1 \\
 b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2 \\
 b_3x_3 + c_3x_4 & = d_3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_{N-2}x_{N-2} + c_{N-2}x_{N-1} & = d_{N-2} \\
 b_{N-1}x_{N-1} + c_{N-1}x_N & = d_{N-1} \\
 b_Nx_N & = d_N
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} b_1x_1 + c_1x_2 \\ b_2x_2 + c_2x_3 \\ b_3x_3 + c_3x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N-2}x_{N-2} + c_{N-2}x_{N-1} \\ b_{N-1}x_{N-1} + c_{N-1}x_N \\ b_Nx_N \end{array}} \right\} \quad 4.36$$

Selanjutnya harga-harga $x_1, x_2, x_3 \dots \dots, x_n$ dapat dihitung dengan *backward substitution*.

$$x_N = d_N/b_N \quad (4.37)$$

$$x_{N-1} = (d_{N-1} - c_{N-1}x_N)/b_{N-1} \quad (4.38)$$

$$x_{N-2} = (d_{N-2} - c_{N-2}x_{N-1})/b_{N-2} \quad (4.39)$$

.

.

.

$$x_i = (d_i - c_i x_{i+1})/b_i \quad (4.40)$$

Dan seterusnya sampai x_1

Contoh program komputer untuk bentuk umum untuk persamaan:

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$

$$2x_3 + x_4 = 6$$

adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_46b
clc
clear all
n = input('Banyaknya variabel = ');
for i=1:n
    fprintf('a(%1.0f) = ',i);
    a(i) = input('');
    fprintf('b(%1.0f) = ',i);
    b(i) = input('');
    fprintf('c(%1.0f) = ',i);
    c(i) = input('');
    fprintf('d(%1.0f) = ',i);
    d(i) = input('');
end
for i=2:n
    rasio=a(i)/b(i-1);
    b(i)=b(i)-rasio*c(i-1);
    d(i)=d(i)-rasio*d(i-1);
end
```

```

x(n)=d(n)/b(n);
for i=(n-1):-1:1
    x(i)=(d(i)-c(i)*x(i+1))/b(i);
end
disp('-----');
disp('    Hasil Perhitungan    ');
disp('-----');
for i=1:n
    fprintf('x(%1.0f) = %1.4f \n',i,x(i));
end
end

```

Keluaran programnya adalah sebagai berikut:

Banyaknya variabel = 4

```

a(1) = 0
b(1) = 2
c(1) = 1
d(1) = 1
a(2) = 1
b(2) = -2
c(2) = 1
d(2) = 9
a(3) = 1
b(3) = -2
c(3) = 1
d(3) = -1
a(4) = 2
b(4) = 1
c(4) = 0
d(4) = 6

```

 Hasil Perhitungan

```

x(1) = 2.0000
x(2) = -3.0000
x(3) = 1.0000
x(4) = 4.0000

```

7. Evaluasi Tetapan dalam Persamaan Empiris

Persamaan empiris adalah persamaan yang bisa mendekati data yang telah ada. Misal tersedia data-data y pada berbagai x , maka dicari suatu persamaan $y = f(x)$ yang memberikan hubungan y dengan x mendekati data. Langkah-langkah yang bisa ditempuh adalah sebagai berikut:

1. Dibuat grafik y versus x berdasar data yang tersedia
2. Berdasar bentuk grafik tersebut kemudian diramalkan bentuk persamaan yang kira-kira cocok (mengandung harga tetapan-tetapan yang belum diketahui harganya).
3. Mengevaluasi harga tetapan-tetapan yang ada dalam persamaan berdasar data yang tersedia
4. Setelah diperoleh harga tetapan-tetapan maka kemudian diuji kesesuaian persamaan empiris yang telah diperoleh, dengan membandingkan hasil hitungan dari persamaan empiris dengan data. Secara sederhana, persamaan empiris dianggap cocok jika *error*-nya kecil. Bila persamaan empiris tidak cocok, maka harus dicoba bentuk persamaan lain.

Cara evaluasi tetapan dalam persamaan empiris bermacam-macam, misalnya *visual inspection*, *method of average* dan kuadrat terkecil (*least square*). Dalam buku ini hanya akan dibahas cara kuadrat terkecil (cara yang paling banyak dipakai).

Pada cara kuadrat terkecil, harga-harga tetapan terbaik adalah yang memberikan jumlah kuadrat kesalahan (*sum of squares of errors*)

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_{hitung} - y_{data})^2 \quad (4.41)$$

yang minimum. Untuk bentuk-bentuk persamaan tertentu, cara kuadrat terkecil ini bisa dijalankan secara analitis, tetapi untuk bentuk-bentuk yang lain terpaksa dijalankan secara numeris. Prinsip-nya adalah minimasi SSE dengan variabel harga tetapan dalam persamaan empiris. Berikut dibahas cara kuadrat terkecil untuk bentuk-bentuk yang sederhana.

a. Bentuk persamaan $y = ax$

Misal tersedia data:

y	2	3	5	7	10
x	0,41	0,58	0,99	1,41	2,02

Ingin dicari harga a yang sesuai.

Untuk pasangan harga $x_i; y_i$, maka *error*-nya adalah:

$$R_i = ax_i - y_i = (y_{\text{terhitung}} - y_{\text{data}}) \quad (4.42)$$

sehingga harga *sum of squares of errors*

$$SSE = \sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2 = f(a) \quad (4.43)$$

Harga SSE tergantung pada harga a yang dipakai. Harga a terbaik adalah yang memberikan SSE minimum. Dijumpai problem minimasi SSE dengan variable a . Harga SSE akan minimum bila:

$$\frac{d(SSE)}{da} = 0 \quad (4.44)$$

sehingga:

$$\sum_{i=1}^n 2(ax_i - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$a \sum (x_i)^2 - \sum (x_i \cdot y_i) = 0$$

$$a = \frac{\sum (x_i \cdot y_i)}{\sum (x_i)^2} \quad (4.45)$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2	0,41	4	0,82
3	0,58	9	1,74
5	0,99	25	4,95
7	1,41	49	9,87
10	2,02	100	20,20
		187	37,58

$$a = \frac{37,58}{187} = 0,201$$

Jadi persamaan empirisnya adalah:

$$y = 0,201x \quad (4.46)$$

b. Bentuk persamaan $y = a_0 + a_1x$

Dengan cara yang analog diperoleh:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2 = f(a_0, a_1) \quad (4.47)$$

Harga SSE akan minimum bila: $\frac{\partial(SSE)}{\partial a_0} = 0$ dan $\frac{\partial(SSE)}{\partial a_1} = 0$

$$\frac{\partial(SSE)}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i - y_i) \cdot 1 = 0 \quad (4.48)$$

$$na_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial(SSE)}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \quad (4.50)$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum (x_i)^2 = \sum x_i y_i \quad (4.51)$$

Dengan persamaan (4.49) dan (4.51), harga-harga a_0 dan a_1 bisa dicari.

c. Bentuk persamaan $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Untuk bentuk ini, maka:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2 = f(a_0, a_1, a_2) \quad (4.52)$$

Harga SSE akan minimum bila: $\frac{\partial(SSE)}{\partial a_0} = 0$; $\frac{\partial(SSE)}{\partial a_1} = 0$ dan $\frac{\partial(SSE)}{\partial a_2} = 0$

$$\frac{\partial(SSE)}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0 \quad (4.53)$$

$$na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial(SSE)}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0 \quad (4.55)$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial(SSE)}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \quad (4.57)$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \quad (4.58)$$

Dengan persamaan (4.54), (4.56) dan (4.58) harga-harga a_0 , a_1 dan a_2 bisa dihitung.

d. Bentuk persamaan polynomial order k

Bentuk polinomial order k adalah:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k \quad (4.59)$$

Dengan cara yang sama, dihasilkan persamaan-persamaan:

$$n. a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 + \dots + a_k \sum x_i^k = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^4 \dots + a_k \sum x_i^{k+1} = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + a_3 \sum x_i^5 \dots + a_k \sum x_i^{k+2} = \sum x_i^2 y_i$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_0 \sum x_i^k + a_1 \sum x_i^{k+1} + a_2 \sum x_i^{k+2} + a_3 \sum x_i^{k+3} \dots + a_k \sum x_i^{k+k} = \sum x_i^k y_i \quad (4.60)$$

Terbentuk persamaan $(k + 1)$ persamaan linier dengan $(k + 1)$ bilangan tak diketahui, sehingga harga-harga $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ bisa dihitung.

Program komputer untuk mencari tetapan-tetapan dalam persamaan polinomial order k adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_47a
clc
clear all
n = input('Orde polinomial = ');
jd = input('Jumlah data = ');
for i=1:jd
    fprintf('x(%1.0f) = ',i);
    x(i) = input('');
    fprintf('y(%1.0f) = ',i);
    y(i) = input('');
end
for j=1:(2*n)+1
    sumx(j)=0;
    for i=1:jd
        sumx(j)=sumx(j)+x(i)^(j-1);
    end
end

for j=1:(n+1)
    sumyx(j)=0;
    for i=1:jd
        sumyx(j)=sumyx(j)+x(i)^(j-1)*y(i);
    end
end
```



```

for i=1:(n+1)
    for j=1:(n+1)
        b(i,j)=sumx(i+j-1);
    end
end

j=n+2;
for i=2:(n+2)
    b((i-1),j)=sumyx(i-1);
end
for i=1:n
    imax=i;
    for ipiv=(i+1):(n+1)
        if abs(b(ipiv,i))>abs(b(imax,i))
            imax=ipiv;
        end
    end
    for l=1:(n+2)
        bsimp=b(i,l);
        b(i,l)=b(imax,l);
        b(imax,l)=bsimp;
    end
    for ibar=(i+1):(n+1)
        rasio=b(ibar,i)/b(i,i);
        for ikol=(i+1):(n+2)
            b(ibar,ikol)=b(ibar,ikol)-rasio*b(i,ikol);
        end
    end
end
a(n+1)=b(n+1,n+2)/b(n+1,n+1);
for i=n:-1:1
    a(i)=b(i,n+2);
    for j=(i+1):(n+1)
        a(i)=a(i)-b(i,j)*a(j);
    end
    a(i)=a(i)/b(i,i);
end
for i=1:jd
    yreg(i)=0;
    for k=1:n+1
        yreg(i)=yreg(i)+a(k)*x(i)^(k-1);
    end
end
end

```

```

disp('Persamaan: Y = a(0)+a(1)X+a(2)X^2+.....+a(n)X^n');
disp('dengan :');
for i=1:n+1
    fprintf('a(%1.0f) = %2.6f \n',(i-1),a(i));
end
disp('-----');
disp(' x    y_data    y_hit ');
disp('-----');
for i=1:jd
    fprintf(' %2.3f    %2.4f    %2.4f \n',x(i),y(i),yreg(i));
end
disp('-----');
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

```

Orde polinomial = 3
Jumlah data    = 10
x(1) = 2.2
y(1) = 11
x(2) = 3.8
y(2) = 13.45
x(3) = 13.1
y(3) = 25.3
x(4) = 16.9
y(4) = 29.7
x(5) = 20.6
y(5) = 33.65
x(6) = 24.25
y(6) = 36.6
x(7) = 26
y(7) = 38.41
x(8) = 31.4
y(8) = 42.68
x(9) = 32.7
y(9) = 43.45
x(10) = 35.9
y(10) = 45.75

```

Persamaan: $Y = a(0) + a(1)X + a(2)X^2 + \dots + a(n)X^n$

dengan :

$a(0) = 7.704883$

$a(1) = 1.552372$

$a(2) = -0.016055$

$a(3) = 0.000064$

x	y_data	y_hit
2.200	11.0000	11.0431
3.800	13.4500	13.3756
13.100	25.3000	25.4303
16.900	29.7000	29.6648
20.600	33.6500	33.4326
24.250	36.6000	36.8253
26.000	38.4100	38.3432
31.400	42.6800	42.6099
32.700	43.4500	43.5477
35.900	45.7500	45.7175

Contoh program penggunaan *backslash* pada kasus ini adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_47aa
clc
clear all
n = input('Orde polinomial = ');
jd = input('Jumlah data = ');
for i=1:jd
    fprintf('x(%1.0f) = ',i);
    x(i) = input('');
    fprintf('y(%1.0f) = ',i);
    y(i) = input('');
end
for j=1:(2*n)+1
    sumx(j)=0;
    for i=1:jd
        sumx(j)=sumx(j)+x(i)^(j-1);
    end
end
end
```

```

for j=1:(n+1)
    sumyx(j)=0;
    for i=1:jd
        sumyx(j)=sumyx(j)+x(i)^(j-1)*y(i);
    end
end

for i=1:(n+1)
    for j=1:(n+1)
        b(i,j)=sumx(i+j-1);
    end
end

j=n+2;
for i=2:(n+2)
    b((i-1),j)=sumyx(i-1);
end
a=b(:,1:n+1);
c=b(:,end);
d=a\c;

for i=1:jd
    yreg(i)=0;
    for k=1:n+1
        yreg(i)=yreg(i)+d(k)*x(i)^(k-1);
    end
end
disp('Persamaan: Y = a(0)+a(1)X+a(2)X^2+.....+a(n)X^n');
disp('dengan :');
for i=1:n+1
    fprintf('a(%1.0f) = %2.6f \n',(i-1),d(i));
end
disp('-----');
disp('  x    y_data    y_hit ');
disp('-----');
for i=1:jd
    fprintf(' %2.3f    %2.4f    %2.4f  \n',x(i),y(i),yreg(i));
end
disp('-----');
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

```
Orde polinomial = 3
Jumlah data    = 10
x(1) = 2.2
y(1) = 11
x(2) = 3.8
y(2) = 13.45
x(3) = 13.1
y(3) = 25.3
x(4) = 16.9
y(4) = 29.7
x(5) = 20.6
y(5) = 33.65
x(6) = 24.25
y(6) = 36.6
x(7) = 26
y(7) = 38.41
x(8) = 31.4
y(8) = 42.68
x(9) = 32.7
y(9) = 43.45
x(10) = 35.9
y(10) = 45.75
Persamaan:  $Y = a(0) + a(1)X + a(2)X^2 + \dots + a(n)X^n$ 
dengan :
a(0) = 7.704883
a(1) = 1.552372
a(2) = -0.016055
a(3) = 0.000064
```

```
-----
  x    y_data    y_hit
-----
 2.200  11.0000  11.0431
 3.800  13.4500  13.3756
13.100  25.3000  25.4303
16.900  29.7000  29.6648
20.600  33.6500  33.4326
24.250  36.6000  36.8253
26.000  38.4100  38.3432
31.400  42.6800  42.6099
32.700  43.4500  43.5477
35.900  45.7500  45.7175
-----
```

e. Bentuk persamaan linier multi-variabel

Bentuk persamaan linier multi-variabel dengan jumlah variable k adalah:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_kx_k \quad (4.61)$$

Dengan cara yang sama, dihasilkan persamaan-persamaan:

$$\left. \begin{aligned} n. a_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + a_3 \sum x_3 + \dots + a_k \sum x_k &= \sum y \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1x_2 + a_3 \sum x_1x_3 \dots + a_k \sum x_1x_k &= \sum y. x_1 \\ a_0 \sum x_2 + a_1 \sum x_2x_1 + a_2 \sum x_2^2 + a_3 \sum x_2x_3 \dots + a_k \sum x_2x_k &= \sum y. x_2 \\ a_0 \sum x_3 + a_1 \sum x_3x_1 + a_2 \sum x_3x_2 + a_3 \sum x_3^2 \dots + a_k \sum x_3x_k &= \sum y. x_3 \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_0 \sum x_k + a_1 \sum x_kx_1 + a_2 \sum x_kx_2 + a_3 \sum x_kx_3 \dots + a_k \sum x_k^2 &= \sum y. x_k \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Program komputer untuk bentuk tersebut adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_47b
clc
clear all
nvar = input('Banyaknya variabel = ');
ndt = input('Banyaknya data = ');
nmat=nvar+1;
for j=1:ndt
    x(1,j)=1;
    fprintf('Data ke - %1.0f \n',j);
    for i=2:(nvar+1)
        fprintf('x(%1.0f) = ',(i-1));
        x(i,j) = input('');
    end
    fprintf('y(%1.0f) = ',j);
    y(j) = input('');
    disp(' ');
end
```

```

for i=1:(nvar+1)
    for j=1:(nvar+1)
        sumxx(i,j)=0;
        for k=1:ndt
            sumxx(i,j)=sumxx(i,j)+x(i,k)*x(j,k);
        end
    end
    sumyx(i)=0;
    for k=1:ndt
        sumyx(i)=sumyx(i)+y(k)*x(i,k);
    end
end

for i=1:nmat
    for j=1:nmat
        a(i,j)=sumxx(i,j);
    end
    a(i,nmat+1)=sumyx(i);
end
for i=1:(nmat-1)
    imax=i;
    for ibar=(i+1):nmat
        if abs(a(ibar,i))>abs(a(imax,i))
            imax=ibar;
        end
    end
    for ikol=i:nmat+1
        asimp=a(imax,ikol);
        a(imax,ikol)=a(i,ikol);
        a(i,ikol)=asimp;
    end
    for ibar=i+1:nmat
        rasio=a(ibar,i)/a(i,i);
        for ikol=i+1:nmat+1
            a(ibar,ikol)=a(ibar,ikol)-rasio*a(i,ikol);
        end
    end
end
end

```

```

b(nmat)=a(nmat,nmat+1)/a(nmat,nmat);
for i=nmat-1:-1:1
    b(i)=a(i,nmat+1);
    for j=i+1:nmat
        b(i)=b(i)-a(i,j)*b(j);
    end
    b(i)=b(i)/a(i,i);
end
disp('Jawaban: Y = ao+a1X1+a2X2+.....+anXn');
for i=1:nmat
    fprintf('a(%1.0f) = %2.6f\n',(i-1),b(i));
end
disp('-----');
disp(' data no.    y_data    y_hit ');
disp('-----');
for i=1:ndt
    yhit=0;
    for j=1:nvar+1
        yhit=yhit+b(j)*x(j,i);
    end
    fprintf('    %2.0f        %2.2f    %2.4f  \n',i,y(i),yhit);
end
disp('-----');
end

```


Keluaran program tersebut adalah:

Banyaknya variabel = 3

Banyaknya data = 6

Data ke - 1

$x(1) = 1$

$x(2) = 2$

$x(3) = 1$

$y(1) = 11.8$

Data ke - 2

$x(1) = 1$

$x(2) = 1$

$x(3) = 2$

$y(2) = 14.2$

Data ke - 3

$x(1) = 2$

$x(2) = 1$

$x(3) = 1$

$y(3) = 13.2$

Data ke - 4

$x(1) = 2$

$x(2) = 0.5$

$x(3) = 1$

$y(4) = 12.5$

Data ke - 5

$x(1) = 2$

$x(2) = 3$

$x(3) = 0.5$

$y(5) = 13.4$

Data ke - 6

$x(1) = 0.5$

$x(2) = 1$

$x(3) = 2$

$y(6) = 12.8$

Jawaban: $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$

$a(0) = 3.743302$

$a(1) = 2.433645$

$a(2) = 1.042368$

$a(3) = 3.452544$

data no.	y_data	y_hit
1	11.80	11.7142
2	14.20	14.1244
3	13.20	13.1055
4	12.50	12.5843
5	13.40	13.4640
6	12.80	12.9076

Contoh program penggunaan *backslash* pada kasus ini adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_47bb
clc
clear all
nvar = input('Banyaknya variabel = ');
ndt = input('Banyaknya data = ');
nmat=nvar+1;
for j=1:ndt
    x(1,j)=1;
    fprintf('Data ke - %1.0f\n',j);
    for i=2:(nvar+1)
        fprintf('x(%1.0f) = ',(i-1));
        x(i,j) = input('');
    end
    fprintf('y(%1.0f) = ',j);
    y(j) = input('');
    disp(' ');
end
```

```

for i=1:(nvar+1)
    for j=1:(nvar+1)
        a(i,j)=0;
        for k=1:ndt
            a(i,j)=a(i,j)+x(i,k)*x(j,k);
        end
    end
    b(i,1)=0;
    for k=1:ndt
        b(i,1)=b(i,1)+y(k)*x(i,k);
    end
end
c=a\b;

disp('Jawaban: Y = ao+a1X1+a2X2+.....+anXn');
for i=1:nmat
    fprintf('a(%1.0f) = %2.6f \n',(i-1),c(i));
end
disp('-----');
disp(' data no.    y_data    y_hit ');
disp('-----');
for i=1:ndt
    yhit=0;
    for j=1:nvar+1
        yhit=yhit+c(j)*x(j,i);
    end
    fprintf('    %2.0f    %2.2f    %2.4f \n',i,y(i),yhit);
end
disp('-----');
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Banyaknya variabel = 3

Banyaknya data = 6

Data ke - 1

$x(1) = 1$

$x(2) = 2$

$x(3) = 1$

$y(1) = 11.8$

Data ke - 2

$x(1) = 1$

$x(2) = 1$

$x(3) = 2$

$y(2) = 14.2$

Data ke - 3

$x(1) = 2$

$x(2) = 1$

$x(3) = 1$

$y(3) = 13.2$

Data ke - 4

$x(1) = 2$

$x(2) = 0.5$

$x(3) = 1$

$y(4) = 12.5$

Data ke - 5

$x(1) = 2$

$x(2) = 3$

$x(3) = 0.5$

$y(5) = 13.4$

Data ke - 6

$x(1) = 0.5$

$x(2) = 1$

$x(3) = 2$

$y(6) = 12.8$

Jawaban: $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$

$a(0) = 3.743302$

$a(1) = 2.433645$

$a(2) = 1.042368$

$a(3) = 3.452544$

data no.	y_data	y_hit
1	11.80	11.7142
2	14.20	14.1244
3	13.20	13.1055
4	12.50	12.5843
5	13.40	13.4640
6	12.80	12.9076

f. Bentuk persamaan linier multi-fungsi

Bentuk persamaan linier multi-fungsi adalah:

$$y = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \dots + a_k f_k \quad (4.63)$$

Dalam hal ini $f_0, f_1, f_2, \dots, f_k$ bisa berupa tetapan, variabel atau fungsi. Kuadrat terkecil untuk bentuk ini adalah:

$$\left. \begin{aligned} a_0 \sum f_0^2 + a_1 \sum f_0 f_1 + a_2 \sum f_0 f_2 + a_3 \sum f_0 f_3 \dots + a_k \sum f_0 f_k &= \sum y \cdot f_0 \\ a_0 \sum f_1 f_0 + a_1 \sum f_1^2 + a_2 \sum f_1 f_2 + a_3 \sum f_1 f_3 \dots + a_k \sum f_1 f_k &= \sum y \cdot f_1 \\ a_0 \sum f_2 f_0 + a_1 \sum f_2 f_1 + a_2 \sum f_2^2 + a_3 \sum f_2 f_3 \dots + a_k \sum f_2 f_k &= \sum y \cdot f_2 \\ a_0 \sum f_3 f_0 + a_1 \sum f_3 f_1 + a_2 \sum f_3 f_2 + a_3 \sum f_3^2 \dots + a_k \sum f_3 f_k &= \sum y \cdot f_3 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_0 \sum f_k f_0 + a_1 \sum f_k f_1 + a_2 \sum f_k f_2 + a_3 \sum f_k f_3 \dots + a_k \sum f_k^2 &= \sum y \cdot f_k \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

g. Bentuk-bentuk lain

Bentuk-bentuk lain ada kemungkinan bisa dijabarkan dengan cara yang analog, atau bisa juga dimanipulasi sehingga berubah menjadi bentuk yang sudah tersedia rumusnya dimuka.

Misal persamaan berbentuk

$$y = a \cdot \exp(b \cdot x) \quad (4.65)$$

dapat dimanipulasi menjadi:

$$\ln y = \ln a + b \cdot x \quad (4.66)$$

Jika ditinjau $\ln y$ versus x , maka diperoleh bentuk seperti pada b .

Misal bentuk perkalian berpangkat:

$$y = K \cdot z_1^{c_1} \cdot z_2^{c_2} \dots z_k^{c_k} \quad (4.67)$$

bisa dimanipulasi menjadi:

$$\ln y = \ln K + c_1 \ln(z_1) + c_2 \ln(z_2) + \dots + c_k \ln(z_k) \quad (4.68)$$

Persamaan (4.65), bila ditinjau $\ln y$ dengan variable $\ln(z_1), \ln(z_2), \dots, \ln(z_k)$ adalah seperti pada bentuk pada e. Contoh program komputer untuk bentuk perkalian berpangkat adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_47c
clc
clear all
nvar = input('Banyaknya variabel = ');
ndt = input('Banyaknya data   = ');
nmat=nvar+1;
for j=1:ndt
    x(1,j)=1;
    fprintf('Data ke - %1.0f \n',j);
    for i=2:(nvar+1)
        fprintf('x(%1.0f) = ',(i-1));
        x(i,j) = log(input(''));
    end
    fprintf('y(%1.0f) = ',j);
    y(j) = log(input(''));
    disp(' ');
end
for i=1:(nvar+1)
    for j=1:(nvar+1)
        sumxx(i,j)=0;
        for k=1:ndt
            sumxx(i,j)=sumxx(i,j)+x(i,k)*x(j,k);
        end
    end
    sumyx(i)=0;
    for k=1:ndt
        sumyx(i)=sumyx(i)+y(k)*x(i,k);
    end
end

for i=1:nmat
    for j=1:nmat
        a(i,j)=sumxx(i,j);
    end
    a(i,nmat+1)=sumyx(i);
end
for i=1:(nmat-1)
    imax=i;
    for ibar=(i+1):nmat
        if abs(a(ibar,i))>abs(a(imax,i))
            imax=ibar;
        end
    end
end

```

```

    for ikol=i:nmat+1
        asimp=a(imax,ikol);
        a(imax,ikol)=a(i,ikol);
        a(i,ikol)=asimp;
    end
    for ibar=i+1:nmat
        rasio=a(ibar,i)/a(i,i);
        for ikol=i+1:nmat+1
            a(ibar,ikol)=a(ibar,ikol)-rasio*a(i,ikol);
        end
    end
end
b(nmat)=a(nmat,nmat+1)/a(nmat,nmat);
for i=nmat-1:-1:1
    b(i)=a(i,nmat+1);
    for j=i+1:nmat
        b(i)=b(i)-a(i,j)*b(j);
    end
    b(i)=b(i)/a(i,i);
end
disp('Jawaban: Y = K * X1^c1 * X2^c2 * .....');
fprintf('K = %2.6f \n',exp(b(1)));
for i=2:nmat
    fprintf('c(%1.0f) = %2.6f \n',(i-1),b(i));
end
disp('-----');
disp(' data no.    y_data    y_hit ');
disp('-----');
for i=1:ndt
    yhit=exp(b(1));
    for j=1:nvar
        yhit=yhit*exp(x(j,i)).^b(j+1);
    end
    fprintf(' %2.0f    %2.2f    %2.4f \n',i,exp(y(i)),yhit);
end
disp('-----');
end

```


Keluaran program tersebut adalah:

Banyaknya variabel = 3

Banyaknya data = 6

Data ke - 1

$x(1) = 1$

$x(2) = 1$

$x(3) = 2$

$y(1) = 1.36$

Data ke - 2

$x(1) = 1$

$x(2) = 2$

$x(3) = 0.8$

$y(2) = 4.85$

Data ke - 3

$x(1) = 2$

$x(2) = 1$

$x(3) = 0.5$

$y(3) = 4.43$

Data ke - 4

$x(1) = 0.5$

$x(2) = 1.5$

$x(3) = 2$

$y(4) = 1.41$

Data ke - 5

$x(1) = 0.8$

$x(2) = 1.2$

$x(3) = 1.5$

$y(5) = 1.72$

Data ke - 6

$x(1) = 1.1$

$x(2) = 0.8$

$x(3) = 1.1$

$y(6) = 1.57$

Jawaban: $Y = K * X1^{c1} * X2^{c2} * \dots$

$K = 2.002241$

$c(1) = 0.589399$

$c(2) = 1.098215$

$c(3) = -0.556343$

data no.	y_data	y_hit
1	1.36	1.36098
2	4.85	4.85321
3	4.43	4.43016
4	1.41	1.42533
5	1.72	1.71155
6	1.57	1.57202

Bila cara kuadrat terkecil analitis tidak memungkinkan, maka bisa dipakai cara kuadrat terkecil numeris, yaitu dengan minimasi numeris dari SSE.

8. Penyelesaian Persamaan Diferensial Ordiner Jenis *Initial Value Problem*

Contoh persamaan diferensial ordiner jenis *initial value problem* adalah:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + xy - 2x^2 = 0 \quad (4.69)$$

dengan keadaan batas:

$$x = x_0; y = y_0; \frac{dy}{dx} = a \quad (4.70)$$

Contoh lain berupa persamaan diferensial ordiner simultan:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + \sqrt{yz} \quad (4.71)$$

$$\frac{dz}{dx} = x^2z + \sqrt{y} \quad (4.72)$$

dengan keadaan batas:

$$x = x_0; y = y_0; z = z_0 \quad (4.73)$$

Jadi pada jenis persamaan ini, harga yang diketahui mengumpul pada suatu titik yaitu x_0 .

Cara penyelesaian numeris untuk kasus ini ada bermacam-macam. Dalam buku ini dibahas dua cara, yaitu Runge-kutta (termasuk *one-step method*) dan *predictor-corrector* (termasuk *multi-step method*).

a. Runge-Kutta

Misal dijumpai persamaan diferensial order satu berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.74)$$

dengan keadaan batas:

$$x = x_0; y = y_0 \quad (4.75)$$

Pada cara Runge-Kutta, diambil suatu harga Δx tertentu (makin kecil makin baik). Rumus Runge-Kutta dapat dipakai untuk menghitung harga y_{i+1} bila harga y_i telah tersedia. Pendekatan Runge-Kutta untuk interval $x_i \rightarrow x_{i+1}$ adalah sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x, y)\Delta x \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)\Delta x \\ k_4 &= f(x_i + \Delta x, y_i + k_3)\Delta x \end{aligned} \right\} \quad 4.76$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad (4.77)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.78)$$

Jadi berdasar x_0, y_0 dapat dihitung x_1, y_1 , kemudian berdasar x_1, y_1 dapat dihitung x_2, y_2 . Demikian seterusnya, sehingga didapat harga y pada berbagai x .

Contoh program komputer untuk penyelesaian persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + y^{0,3} \quad (4.79)$$

dengan keadaan batas:

$$x_0 = 0,5; y_0 = 0,4 \quad (4.80)$$

adalah sebagai berikut (ingin dicari jawaban dari $x_0 = 0,5$ sampai $x_N = 1,5$ dan interval tersebut dibagi menjadi N bagian).

```

function Latihan_48a
clc
clear all
xo = input('Harga x awal    = ');
yo = input('Harga y awal    = ');
xn = input('Harga x akhir   = ');
n  = input('Banyaknya interval = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
y(1)=yo;
disp('-----');
disp('    x        y    ');
disp('-----');
fprintf(' %1.3f    %2.6f \n',x(1),y(1));
for i=2:n+1
    var=[x(i-1) y(i-1)];
    dfdx=funksi(var);
    k1=delx*dfdx;
    var=[(x(i-1)+delx/2) (y(i-1)+k1/2)];
    dfdx=funksi(var);
    k2=delx*dfdx;
    var=[(x(i-1)+delx/2) (y(i-1)+k2/2)];
    dfdx=funksi(var);
    k3=delx*dfdx;
    var=[(x(i-1)+delx) (y(i-1)+k3)];
    dfdx=funksi(var);
    k4=delx*dfdx;
    y(i)=y(i-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)./6;
    fprintf(' %1.3f    %2.6f \n',x(i),y(i));
end
disp('-----');
end

function dydx=funksi(var)
x=var(1);
y=var(2);
dydx=sqrt(x)+y^0.3;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Harga x awal	= 0.5
Harga y awal	= 0.4
Harga x akhir	= 1.5
Banyaknya interval	= 10

x	y

0.500	0.400000
0.600	0.554089
0.700	0.721982
0.800	0.902443
0.900	1.094519
1.000	1.297442
1.100	1.510576
1.200	1.733384
1.300	1.965406
1.400	2.206237
1.500	2.455524

Jika dijumpai persamaan diferensial ordiner 1 simultan 2 baris berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \quad (4.81)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \quad (4.82)$$

dengan keadaan batas:

$$x = x_0; y = y_0; z = z_0 \quad (4.83)$$

maka rumus Runge-Kutta untuk mencari $x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}$ berdasar harga x_i, y_i, z_i adalah:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f_1(x_i, y_i, z_i) \Delta x \\
l_1 &= f_2(x_i, y_i, z_i) \Delta x \\
k_2 &= f_1\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right) \Delta x \\
l_2 &= f_2\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right) \Delta x \\
k_3 &= f_1\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right) \Delta x \\
l_3 &= f_2\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right) \Delta x \\
k_4 &= f_1(x_i + \Delta x, y_i + k_3, z_i + l_3) \Delta x \\
l_4 &= f_2(x_i + \Delta x, y_i + k_3, z_i + l_3) \Delta x
\end{aligned}
\tag{4.84}$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \tag{4.85}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.86}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \tag{4.87}$$

Contoh program komputer untuk persamaan diferensial ordiner order 1 simultan 2 baris:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy} + z^{0,3} \tag{4.88}$$

$$\frac{dz}{dx} = x + \sqrt{yz} \tag{4.89}$$

dengan keadaan batas:

$$x_0 = 0,5; y_0 = 1 \text{ dan } z_0 = 0,8 \tag{4.90}$$

adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_48b
clc
clear all
xo = input('Harga x awal    = ');
yo = input('Harga y awal    = ');
zo = input('Harga z awal    = ');
xn = input('Harga x akhir   = ');
n = input('Banyaknya interval = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
y(1)=yo;
z(1)=zo;
disp('-----');
disp('    x        y        z    ');
disp('-----');
fprintf(' %1.3f    %2.6f    %2.6f \n',x(1),y(1),z(1));
for i=2:n+1
    var=[x(i-1) y(i-1) z(i-1)];
    dfdx=funksi(var);
    k1=delx*dfdx(1);
    l1=delx*dfdx(2);
    var=[(x(i-1)+delx/2) (y(i-1)+k1/2) (z(i-1)+l1/2)];
    dfdx=funksi(var);
    k2=delx*dfdx(1);
    l2=delx*dfdx(2);
    var=[(x(i-1)+delx/2) (y(i-1)+k2/2) (z(i-1)+l2/2)];
    dfdx=funksi(var);
    k3=delx*dfdx(1);
    l3=delx*dfdx(2);
    var=[(x(i-1)+delx) (y(i-1)+k3) (z(i-1)+l3)];
    dfdx=funksi(var);
    k4=delx*dfdx(1);
    l4=delx*dfdx(2);
    y(i)=y(i-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)./6;
    z(i)=z(i-1)+(l1+2*l2+2*l3+l4)./6;
    fprintf(' %1.3f    %2.6f    %2.6f \n',x(i),y(i),z(i));
end
disp('-----');
end

```

```

function fungsi=fungsi(var)
x=var(1);
y=var(2);
z=var(3);
dydx=sqrt(x*y)+z^0.3;
dzdx=x+sqrt(y*z);
fungsi=[dydx,dzdx];
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

```

Harga x awal      = 0.5
Harga y awal      = 1
Harga z awal      = 0.8
Harga x akhir     = 1.5
Banyaknya interval = 10
-----
      x          y          z
-----
0.500    1.000000    0.800000
0.600    1.173268    0.952385
0.700    1.365195    1.132199
0.800    1.576664    1.341872
0.900    1.808546    1.583997
1.000    2.061701    1.861328
1.100    2.336977    2.176791
1.200    2.635212    2.533483
1.300    2.957236    2.934683
1.400    3.303876    3.383857
1.500    3.675951    3.884660
-----

```


Untuk persamaan diferensial ordiner order 1 simultan berjumlah n baris, maka rumus yang dipakai analog dengan persamaan (4.84).

Pendekatan Runge-Kutta secara tidak langsung dapat dipakai pula untuk persamaan diferensial ordiner tingkat tinggi dengan cara substitusi terlebih dahulu, sehingga persamaan diferensial ordiner order m berubah menjadi persamaan diferensial simultan order satu m baris. Contoh:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sqrt{x} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x \cdot y = x^2 \quad (4.91)$$

Misal $\frac{dy}{dx} = z$

Diperoleh:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \sqrt{x} \frac{dz}{dx} + z + x \cdot y = x^2 \quad (4.92)$$

Dimisalkan lagi $\frac{dz}{dx} = u$, maka persamaan diatas menjadi:

$$\frac{du}{dx} + \sqrt{x}u + z + x \cdot y = x^2 \quad (4.93)$$

atau

$$\frac{du}{dx} = x^2 - \sqrt{x}u - z - x \cdot y \quad (4.94)$$

Jadi diperoleh persamaan diferensial ordiner 1 simultan sebanyak 3 baris sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z \\ \frac{dz}{dx} &= u \\ \frac{du}{dx} &= x^2 - \sqrt{x}u - z - x \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (4.95)$$

Selain menggunakan cara diatas, penyelesaian persamaan diferensial ordiner dapat menggunakan toolbox **ode45** yang tersedia di MATLAB. Penggunaan toolbox **ode45** untuk contoh diatas dapat dilihat pada listing program berikut ini:

```

function Latihan_48aa
clc
clear all
xo = input('Harga x awal    = ');
yo = input('Harga y awal    = ');
xn = input('Harga x akhir   = ');
n = input('Banyaknya interval = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
[X, Y]=ode45(@fungsi,x,yo);
disp('-----');
disp('    x        y    ');
disp('-----');
for i=1:n+1
    fprintf(' %1.3f    %2.6f \n',X(i),Y(i));
end
disp('-----');
end

function dydx=fungsi(x,y)
dydx=sqrt(x)+y^0.3;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

```

Harga x awal      = 0.5
Harga y awal      = 0.4
Harga x akhir     = 1.5
Banyaknya interval = 10

```

```

-----
    x        y
-----
0.500    0.400000
0.600    0.554089
0.700    0.721982
0.800    0.902443
0.900    1.094519
1.000    1.297442
1.100    1.510576
1.200    1.733384
1.300    1.965406
1.400    2.206237
1.500    2.455524
-----

```

b. Predictor-Corrector

Jika pada Runge-Kutta perhitungan untuk satu titik membutuhkan harga pada satu titik di mukanya (*one-step method*), maka pada cara *predictor corrector*, perhitungan untuk suatu titik membutuhkan harga pada beberapa titik dimukanya (*multi-step method*).

Misal ditinjau persamaan:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.96)$$

maka rumus untuk mencari y_{i+1} adalah sebagai berikut:

Predictor:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \quad (4.97)$$

Corrector:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \quad (4.98)$$

Jadi harga y_{i+1} mula-mula diperkirakan dengan persamaan (4.97), kemudian diperbaiki dengan persamaan (4.98).

Bila dijumpai bentuk simultan 2 baris:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \quad (4.99)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \quad (4.100)$$

maka rumus umumnya adalah:

Predictor:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24} (55(f_1)_i - 59(f_1)_{i-1} + 37(f_1)_{i-2} - 9(f_1)_{i-3}) \quad (4.101)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{\Delta x}{24} (55(f_2)_i - 59(f_2)_{i-1} + 37(f_2)_{i-2} - 9(f_2)_{i-3}) \quad (4.102)$$

Corrector:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24} (9(f_1)_{i+1} + 19(f_1)_i - 5(f_1)_{i-1} + (f_1)_{i-2}) \quad (4.103)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{\Delta x}{24} (9(f_2)_{i+1} + 19(f_2)_i - 5(f_2)_{i-1} + (f_2)_{i-2}) \quad (4.104)$$

Untuk persamaan simultan n baris, maka rumusnya analog. Secara umum *multi-step method* (*predictor-corrector* misalnya) lebih baik dari *one-step method* (misalnya Runge-Kutta).

Cara *predictor-corrector* tidak bisa dipakai pada awal-awal hitungan karena baru tersedia harga pada satu titik x_0 . Oleh karena itu hitungan awal dikerjakan dengan cara *one-*

step method, misalnya Runge-Kutta, kemudian setelah jumlah titik yang tersedia mencukupi, baru dikerjakan dengan *predictor-corrector*.

Contoh program kombinasi *predictor-corrector* dan Runge-Kutta untuk persamaan diferensial simultan 2 baris:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy} + z^{0,3} \quad (4.88)$$

$$\frac{dz}{dx} = x + \sqrt{yz} \quad (4.89)$$

dengan keadaan batas:

$$x_0 = 0,5; y_0 = 1; z_0 = 0,8 \quad (4.90)$$

adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_48c
clc
clear all
xo = input('Harga x awal   = ');
yo = input('Harga y awal   = ');
zo = input('Harga z awal   = ');
xn = input('Harga x akhir  = ');
n = input('Banyaknya interval = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
y(1)=yo;
z(1)=zo;
var=[x(1) y(1) z(1)];
dfdx=fungsi(var);
fy(1)=dfdx(1);
fz(1)=dfdx(2);
disp('-----');
disp('  x      y      z  ');
disp('-----');
fprintf(' %1.3f    %2.6f  %2.6f\n',x(1),y(1),z(1));
```

```

for i=1:n
    if i<=3
        var=[x(i) y(i) z(i)];
        dfdx=funksi(var);
        k1=delx*dfdx(1);
        l1=delx*dfdx(2);
        var=[(x(i)+delx/2) (y(i)+k1/2) (z(i)+l1/2)];
        dfdx=funksi(var);
        k2=delx*dfdx(1);
        l2=delx*dfdx(2);
        var=[(x(i)+delx/2) (y(i)+k2/2) (z(i)+l2/2)];
        dfdx=funksi(var);
        k3=delx*dfdx(1);
        l3=delx*dfdx(2);
        var=[(x(i)+delx) (y(i)+k3) (z(i)+l3)];
        dfdx=funksi(var);
        k4=delx*dfdx(1);
        l4=delx*dfdx(2);
        y(i+1)=y(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)./6;
        z(i+1)=z(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)./6;
        var=[x(i+1) y(i+1) z(i+1)];
        dfdx=funksi(var);
        fy(i+1)=dfdx(1);
        fz(i+1)=dfdx(2);
    else
        y(i+1)=y(i)+delx*(55*fy(i)-59*fy(i-1)+37*fy(i-2)-9*fy(i-3))/24;
        z(i+1)=z(i)+delx*(55*fz(i)-59*fz(i-1)+37*fz(i-2)-9*fz(i-3))/24;
        var=[x(i+1) y(i+1) z(i+1)];
        dfdx=funksi(var);
        fy(i+1)=dfdx(1);
        fz(i+1)=dfdx(2);
        y(i+1)=y(i)+delx*(9*fy(i+1)+19*fy(i)-5*fy(i-1)+fy(i-2))/24;
        z(i+1)=z(i)+delx*(9*fz(i+1)+19*fz(i)-5*fz(i-1)+fz(i-2))/24;
    end
    fprintf(' %1.3f    %2.6f    %2.6f\n',x(i+1),y(i+1),z(i+1));
end
disp('-----');
end

```

```

function fungsi=fungsi(var)
x=var(1);
y=var(2);
z=var(3);
dydx=sqrt(x*y)+z^0.3;
dzdx=x+sqrt(y*z);
fungsi=[dydx,dzdx];
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

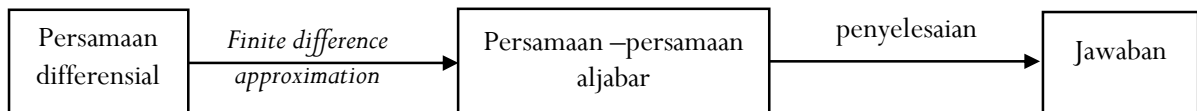
Harga x awal	=	0.5
Harga y awal	=	1
Harga z awal	=	0.8
Harga x akhir	=	1.5
Banyaknya interval	=	10

x	y	z
0.500	1.000000	0.800000
0.600	1.173268	0.952385
0.700	1.365195	1.132199
0.800	1.576664	1.341872
0.900	1.808546	1.583997
1.000	2.061702	1.861329
1.100	2.336978	2.176792
1.200	2.635213	2.533484
1.300	2.957237	2.934685
1.400	3.303877	3.383858
1.500	3.675952	3.884662

Suatu contoh bentuk program lain untuk kombinasi Runge-Kutta dan *predictor-corrector* yang lebih menghemat memori computer ditunjukkan dalam sub-bab 5.5.

9. Finite Difference Approximation untuk Persamaan Diferensial Ordiner

Finite Difference Approximation atau pendekatan beda hingga dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik ordiner maupun parsial. Dengan *Finite Difference Approximation*, persamaan diferensial didekati dengan persamaan-persamaan aljabar yang lebih mudah diselesaikan (Gambar 4.6).

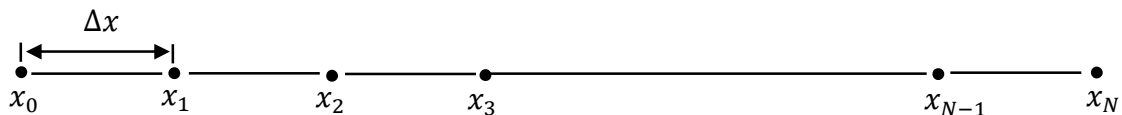


Gambar 4.6. Skema penyelesaian persamaan diferensial dengan *finite difference approximation*

Misal dijumpai persamaan diferensial ordiner yang merupakan hubungan antara y dengan x . Ingin dicari jawaban pada interval x_0 sampai x_N . Interval dibagi menjadi N bagian sama besar, yang masing-masing besarnya Δx (makin kecil Δx , makin baik jawabannya).

$$\Delta x = \frac{x_N - x_0}{N} \quad (4.105)$$

Batas-batas interval diberi no $0, 1, 2, 3, \dots, N$ (lihat gambar 4.7).



Gambar 4.7. Pembagian interval antara x_0 sampai x_N .

Dengan mudah dapat dilihat bahwa:

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x \quad (4.106)$$

Selanjutnya ingin dicari jawaban berupa harga y pada batas-batas interval $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_N)$.

Finite difference approximation yang sering dipakai adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (\text{forward}) \quad (4.107)$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (\text{backward}) \quad (4.108)$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (\text{central}) \quad (4.109)$$

Secara teoritis pendekatan *central difference* paling baik.

Untuk turunan kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \approx \frac{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{i+1} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_i}{\Delta x} \approx \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \quad (4.110)$$

Jadi diperoleh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (4.111)$$

Sebagai contoh penggunaan cara ini, ditinjau persamaan diferensial jenis *boundary value problem*:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - 2y = x \quad (4.112)$$

dengan keadaan batas:

$$x_0 = 1; y_0 = 0,4$$

$$x_N = 2; y_N = 0,8 \quad (4.113)$$

Substitusi persamaan (4.109) dan (4.111) ke persamaan (4.112) menghasilkan:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{2}{(x_0 + i \Delta x)} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \Delta x} - 2 \cdot y_i = x_0 + i \cdot \Delta x \quad (4.114)$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + i\right)} (y_{i+1} - y_{i-1}) - 2(\Delta x)^2 y_i = x_0(\Delta x)^2 + i \cdot (\Delta x)^3 \quad (4.115)$$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + i\right)} \right\} y_{i-1} + \{-2 - 2 \cdot (\Delta x)^2\} y_i + \left\{ 1 + \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + i\right)} \right\} y_{i+1} = x_0(\Delta x)^2 + i \cdot (\Delta x)^3 \quad (4.116)$$

Persamaan (4.116) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Khusus untuk $i = 1$, karena harga y_0 sudah diketahui, maka persamaan (4.116) berubah menjadi:

$$\{-2 - 2 \cdot (\Delta x)^2\} y_1 + \left\{ 1 + \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + i\right)} \right\} y_2 = x_0(\Delta x)^2 + i \cdot (\Delta x)^3 - \left\{ 1 - \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + i\right)} \right\} y_0 \quad (4.117)$$

Khusus untuk $i = N - 1$, karena harga y_N sudah diketahui, maka persamaan (4.116) berubah menjadi:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + N - 1\right)} \right\} y_{N-2} + \{-2 - 2 \cdot (\Delta x)^2\} y_{N-1} \\ & = x_0(\Delta x)^2 + (N - 1) \cdot (\Delta x)^3 - \left\{ 1 + \frac{1}{\left(\frac{x_0}{\Delta x} + n - 1\right)} \right\} y_n \end{aligned} \quad (4.118)$$

Persamaan-persamaan (4.116), (4.117) dan (4.118) membentuk persamaan matriks tridiagonal sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcl}
 b_1 y_1 + c_1 y_2 & = & d_1 \\
 a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 & = & d_2 \\
 a_3 y_2 + b_3 y_3 + c_3 y_4 & = & d_3 \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 a_{N-1} y_{N-2} + b_{N-1} y_{N-1} + c_{N-1} y_N & = & d_{N-1} \\
 a_N y_{N-1} + b_N y_N & = & d_N
 \end{array} \quad (4.119)$$

Persamaan matriks tridiagonal (4.119) dapat diselesaikan dengan cara seperti pada sub-bab 4.6. Contoh program computer untuk pelaksanaan hitungannya adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_49
clc
clear all
xo = input('Harga x awal interval = ');
xn = input('Harga x akhir interval = ');
yo = input('Harga y awal interval = ');
yn = input('Harga y akhir interval = ');
n = input('Banyaknya interval = ');
delx=(xn-xo)/n;
x=[xo:delx:xn];
y(1)=yo;
y(n+1)=yn;
a(2)=0;
b(2)=-2-2*delx^2;
c(2)=1+1/(xo/delx+1);
d(2)=xo*delx^2+delx^3-(1-1/(xo/delx+1))*y(1);

```

```

for i=3:n-1
    a(i)=1-1/(xo/delx+i);
    b(i)=-2-2*delx^2;
    c(i)=1+1/(xo/delx+i);
    d(i)=xo*delx^2+i*delx^3;
end
a(n)=1-1/(xo/delx+n-1);
b(n)=-2-2*delx^2;
c(n)=0;
d(n)=xo*delx^2+n*delx^3-(1+1/(xo/delx+n-1))*y(n+1);
for i=3:n
    rasio=a(i)/b(i-1);
    b(i)=b(i)-rasio*c(i-1);
    d(i)=d(i)-rasio*d(i-1);
end
y(n)=d(n)/b(n);
for i=n-1:-1:2
    y(i)=(d(i)-c(i)*y(i+1))/b(i);
end
disp('-----');
disp('  Hasil Perhitungan  ');
disp('-----');
disp('    x      y    ');
disp('-----');
for i=1:(n+1)
    fprintf(' %1.3f    %2.6f \n',x(i),y(i));
end
disp('-----');
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

```
Harga x awal interval = 1
Harga x akhir interval = 2
Harga y awal interval = 0.4
Harga y akhir interval = 0.8
Banyaknya interval = 10
```

Hasil Perhitungan

x	y
1.000	0.400000
1.100	0.346666
1.200	0.318660
1.300	0.312644
1.400	0.326333
1.500	0.358492
1.600	0.408674
1.700	0.477056
1.800	0.564331
1.900	0.671651
2.000	0.800000

Cara *finite difference approximation* cocok untuk persamaan diferensial ordiner jenis *boundary value problem*. Persamaan diferensial jenis ini bila diselesaikan dengan cara Runge-Kutta atau *predictor-corrector* memerlukan *trial* dan *error* harga-harga pada titik awal.

10. Finite Difference Approximation untuk Persamaan Diferensial Parsial

Pada bagian ini akan dibahas penggunaan *finite difference approximation* untuk persamaan differensial parsial. Tersedia berbagai cara penyelesaian, tetapi dalam bab ini hanya akan dibahas 3 cara saja, yaitu cara eksplisit (*forward*), implisit (*backward*) dan Crank-Nicolson.

Misal ditinjau persamaan diferensial berbentuk:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.120)$$

Dengan keadaan batas:

$$y(x, 0) = y_{in} \quad (4.121)$$

$$y(0, t) = y_a \quad (4.122)$$

$$y(L, t) = y_b \quad (4.123)$$

Ingin dicari $y = f(x, t)$ pada interval $0 \leq x \leq L$ dengan cara numeris menggunakan *finite difference approximation*.

Interval $x = 0$ sampai $x = L$ dibagi menjadi N bagian sama besar yang masing-masing besarnya Δx (makin kecil Δx , makin baik jawabannya). Batas-batas interval diberi indeks $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$. Dengan mudah terlihat bahwa:

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x \quad (4.124)$$

$$= i \cdot \Delta x \quad (4.125)$$

Interval t dibagi menjadi bagian-bagian kecil sama besar yang masing-masing besarnya Δt . Batas-batas interval diberi indeks $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dengan mudah terlihat bahwa:

$$t = j \cdot \Delta t \quad (4.126)$$

Mirip dengan pada persamaan diferensial ordiner (bab 4.8), dapat disusun *finite difference approximation* sebagai berikut:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{forward}) \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{backward}) \quad (4.128)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} \quad (\text{central}) \quad (4.129)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (4.130)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} \quad (4.131)$$

a. Cara eksplisit (forward)

Substitusi persamaan (4.130) dan (4.131) ke persamaan (4.120) menghasilkan:

$$\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} \quad (4.132)$$

$$y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) \quad (4.133)$$

$$y_{i,j+1} = \frac{y_{i-1,j} + (M-2)y_{i,j} + y_{i+1,j}}{M} \quad (4.134)$$

dengan:

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \text{modulus} \quad (4.135)$$

Persamaan (4.134) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ (harga $y_{0,j} = y_a$ dan $y_{N,j} = y_b$).

Misal untuk $i = 3$:

$$y_{3,j+1} = \frac{y_{2,j} + (M-2)y_{3,j} + y_{4,j}}{M} \quad (4.136)$$

Apabila harga-harga y pada indeks j tersedia, maka harga-harga y dengan indeks $j + 1$ dapat dihitung dengan persamaan (4.134). Karena harga-harga y pada $j = 0$ ($t = 0$) tersedia yaitu y_{in} , maka harga-harga y pada $j = 1$ dapat dihitung. Setelah harga-harga y pada $j = 1$ tersedia, dapat dihitung harga-harga y pada $j = 2$, demikian seterusnya. Program komputer untuk pelaksanaan hitungannya adalah sebagai berikut (ditentukan $y_{in} = 0,5$; $y_a = 1,0$; $y_b = 0,2$; $L = 1$; $N = 10$; dan $M = 4$, hitungan dijalankan sampai $j = 2$, harga Δt dihitung dari M dan Δx).

```
function Latihan_410a
clc
clear all
yin = input('Masukkan nilai Yin = ');
ya = input('Masukkan nilai Ya = ');
yb = input('Masukkan nilai Yb = ');
al = input('L = ');
n = input('Banyaknya interval x = ');
am = input('Modulus (M) = ');
jend = input('Batas J = ');
delx=al/n;
delt=delx^2/am;
y=ones((n+1),1)*yin;
j=0;
ulang=0;
```

```

while ulang==0
    time=j*delt;
    fprintf(' %1.0f      (t = %1.3f) \n',j,time);
    disp('-----');
    disp('    x      y    ');
    disp('-----');
    for i=1:(n+1)
        if j>0 && i==1
            y(i)=ya;
        end
        if j>0 && i==(n+1)
            y(i)=yb;
        end
        fprintf(' %1.3f      %2.6f \n',(i-1)*delx,y(i));
    end
    if j>=jend
        break;
    else
        for i=2:n
            ynew(i)=(y(i-1)+(am-2)*y(i)+y(i+1))/am;
        end
        j=j+1;
        for i=2:n
            y(i)=ynew(i);
        end
    end
    disp('-----');
end
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Masukkan nilai $Y_{in} = 0.5$
Masukkan nilai $Y_a = 1$
Masukkan nilai $Y_b = 0.2$
 $L = 1$
Banyaknya interval $x = 10$
Modulus (M) $= 4$
Batas $J = 2$
0 (t = 0.000)

x y

0.000 0.500000
0.100 0.500000
0.200 0.500000
0.300 0.500000
0.400 0.500000
0.500 0.500000
0.600 0.500000
0.700 0.500000
0.800 0.500000
0.900 0.500000
1.000 0.500000

1 (t = 0.003)

x y

0.000 1.000000
0.100 0.500000
0.200 0.500000
0.300 0.500000
0.400 0.500000
0.500 0.500000
0.600 0.500000
0.700 0.500000
0.800 0.500000
0.900 0.500000
1.000 0.200000

2 (t = 0.005)	
x	y
0.000	1.000000
0.100	0.625000
0.200	0.500000
0.300	0.500000
0.400	0.500000
0.500	0.500000
0.600	0.500000
0.700	0.500000
0.800	0.500000
0.900	0.425000
1.000	0.200000

Cara eksplisit ini stabil bersyarat. Pada kasus ini hasilnya akan stabil bila diambil harga $M \geq 2$ {lihat persamaan (4.131)}. Persamaan (4.129) menunjukkan pula bahwa perhitungan perubahan pada interval j sampai $j + 1$ menggunakan harga-harga pada j . Cara eksplisit ini mempunyai *local truncation error* order 2 terhadap Δx (pangkat 2) dan dengan Δt pangkat 1. Pengertian mengenai *local truncation error* dapat dibaca pada buku-buku metode numeric, misalnya Burden (1986).

b. Cara implisit (backward)

Suatu cara perhitungan yang lebih stabil dibanding cara eksplisit, meskipun order *local truncation error*-nya sama, adalah cara implisit. Dibahas contoh soal yang sama seperti pada cara eksplisit. Pada cara implisit, perhitungan pada interval waktu j sampai $j + 1$ menggunakan harga-harga pada waktu $j + 1$ (*backward*), sehingga persamaan (4.120) berubah menjadi:

$$\frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} \quad (4.137)$$

$$y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) \quad (4.138)$$

$$y_{i-1,j+1} + (-2 - M)y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} = -M \cdot y_{i,j} \quad (4.139)$$

Persamaan (4.139) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Khusus untuk $i = 1$, karena harga $y_{0,j+1} = y_a$, maka persamaan (4.139) berubah menjadi:

$$(-2 - M)y_{1,j+1} + y_{2,j+1} = -M \cdot y_{1,j} - y_a \quad (4.140)$$

Khusus untuk $i = N$, karena harga $y_{N,j+1} = y_b$, maka persamaan (4.139) berubah menjadi:

$$y_{N-2,j+1} + (-2 - M)y_{N-1,j+1} = -M \cdot y_{N-1,j} - y_b \quad (4.141)$$

Berdasar persamaan (4.139), (4.140) dan (4.141), apabila harga-harga y dengan indeks j diketahui, maka harga-harga y dengan indeks $j + 1$ dapat dihitung. Dalam hal ini $y_{i,j+1}$ tak bisa dihitung secara langsung seperti pada cara eksplisit, tetapi terbentuk $N - 1$ persamaan dengan $N - 1$ bilangan tak diketahui, $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1})$ yang berbentuk matriks tridiagonal (4.142). Cara penyelesaiannya dapat dilihat pada bab 4.5.

$$\begin{array}{rcl} b_1 y_{1,j+1} + c_1 y_{2,j+1} & = d_1 \\ a_2 y_{1,j+1} + b_2 y_{2,j+1} + c_2 y_{3,j+1} & = d_2 \\ a_3 y_{2,j+1} + b_3 y_{3,j+1} + c_3 y_{4,j+1} & = d_3 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N-2} y_{N-3,j+1} + b_{N-2} y_{N-2,j+1} + c_{N-2} y_{N-1,j+1} & = d_{N-2} \\ a_{N-1} y_{N-2,j+1} + b_{N-1} y_{N-1,j+1} & = d_{N-1} \end{array} \quad (4.142)$$

Karena harga-harga y pada $j = 0$ diketahui (y_{in}), maka harga-harga y pada $j = 1$ dapat dihitung. Setelah itu berdasar harga-harga y pada $j = 1$, dapat dihitung harga-harga y pada $j = 2$, demikian seterusnya. Program komputer untuk pelaksanaan hitungannya adalah sebagai berikut (dipakai harga-harga yang sama seperti pada cara eksplisit).

```

function Latihan_410b
clc
clear all
yin = input('Masukkan nilai Yin = ');
ya = input('Masukkan nilai Ya = ');
yb = input('Masukkan nilai Yb = ');
al = input('L = ');
n = input('Banyaknya interval x = ');
am = input('Modulus (M) = ');
jend = input('Batas J = ');
delx=al/n;
delt=delx^2/am;
y=ones((n+1),1)*yin;
j=0;
ulang=0;
while ulang==0
    time=j*delt;
    fprintf(' %1.0f      (t = %1.3f) \n',j,time);
    disp('-----');
    disp('  x      y  ');
    disp('-----');
    for i=1:(n+1)
        if j>0 && i==1
            y(i)=ya;
        end
        if j>0 && i==(n+1)
            y(i)=yb;
        end
        fprintf(' %1.3f      %2.6f \n', (i-1)*delx,y(i));
    end
    if j>=jend
        break;
    end
    j=j+1;
    ulang=1;
end

```

```

else
    a(2)=0;
    b(2)=-am-2;
    c(2)=1;
    d(2)=-am*y(2)-ya;
    for i=3:n-1
        a(i)=1;
        b(i)=-am-2;
        c(i)=1;
        d(i)=-am*y(i);
    end
    a(n)=1;
    b(n)=-am-2;
    c(n)=0;
    d(n)=-am*y(n)-yb;
    for i=3:n
        rasio=a(i)/b(i-1);
        b(i)=b(i)-rasio*c(i-1);
        d(i)=d(i)-rasio*d(i-1);
    end
    y(n)=d(n)/b(n);
    for i=n-1:-1:2
        y(i)=(d(i)-c(i)*y(i+1))/b(i);
    end
    j=j+1;
end
disp('-----');
end
disp('-----');
end

```

Keluaran program tersebut adalah sebagai berikut:

Masukkan nilai $Y_{in} = 0.5$
Masukkan nilai $Y_a = 1$
Masukkan nilai $Y_b = 0.2$
 $L = 1$
Banyaknya interval $x = 10$
Modulus (M) $= 4$
Batas J $= 2$
0 (t = 0.000)

x	y
0.000	0.500000
0.100	0.500000
0.200	0.500000
0.300	0.500000
0.400	0.500000
0.500	0.500000
0.600	0.500000
0.700	0.500000
0.800	0.500000
0.900	0.500000
1.000	0.500000

1 (t = 0.003)

x	y
0.000	1.000000
0.100	0.585786
0.200	0.514718
0.300	0.502524
0.400	0.500426
0.500	0.500030
0.600	0.499753
0.700	0.498487
0.800	0.491169
0.900	0.448528
1.000	0.200000

2 (t = 0.005)	
x	y
0.000	1.000000
0.100	0.646446
0.200	0.535532
0.300	0.507875
0.400	0.501619
0.500	0.500135
0.600	0.499072
0.700	0.495284
0.800	0.478682
0.900	0.412132
1.000	0.200000

c. Crank Nicolson

Suatu cara yang lebih baik lagi, dalam arti stabil tak bersyarat dan local truncation error-nya order 2 terhadap Δx dan order 2 terhadap Δt , atau $O\{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\}$, adalah cara Crank-Nicolson. Pada cara ini, perhitungan pada interval j sampai $j + 1$ menggunakan harga rata-rata dari j sampai $j + 1$. Untuk soal yang sama seperti pada cara eksplisit, dengan pendekatan ini, persamaan (4.120) berubah menjadi:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \right) = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} \quad (4.143)$$

$$y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} = \frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) \quad (4.144)$$

$$y_{i-1,j+1} + (-2 - 2M)y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} = -y_{i-1,j} + (2 - 2M)y_{i,j} - y_{i+1,j} \quad (4.145)$$

Persamaan (4.145) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$.

Khusus untuk $i = 1$, karena harga $y_{0,j+1} = y_a$, maka persamaan (4.145) berubah menjadi:

$$(-2 - 2M)y_{1,j+1} + y_{2,j+1} = -2y_a + (2 - 2M)y_{1,j} - y_{2,j} \quad (4.146)$$

Khusus untuk $i = N$, karena harga $y_{N,j+1} = y_b$, maka persamaan (4.145) berubah menjadi:

$$y_{N-2,j+1} + (-2 - 2M)y_{N-1,j+1} = -y_{N-2,j} + (2 - 2M)y_{N-1,j} - 2y_b \quad (4.147)$$

Seperti pada cara implisit, persamaan-persamaan (4.145), (4.146) dan (4.147) dapat dipakai untuk menghitung harga-harga y pada $j + 1$. Dalam hal ini terbentuk $N - 1$ persamaan dengan $N - 1$ bilangan tak diketahui berupa persamaan matriks tridiagonal.

Contoh program komputer untuk cara Crank-Nicolson adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_410c
clc
clear all
yin = input('Masukkan nilai Yin = ');
ya = input('Masukkan nilai Ya = ');
yb = input('Masukkan nilai Yb = ');
al = input('L = ');
n = input('Banyaknya interval x = ');
am = input('Modulus (M) = ');
jend = input('Batas J = ');
delx=al/n;
delt=delx^2/am;
y=ones((n+1),1)*yin;
j=0;
ulang=0;
while ulang==0
    time=j*delt;
    fprintf(' %1.0f      (t = %1.3f) \n',j,time);
    disp('-----');
    disp('  x      y  ');
    disp('-----');
    for i=1:(n+1)
        if j>0 && i==1
            y(i)=ya;
        end
        if j>0 && i==(n+1)
            y(i)=yb;
        end
        fprintf(' %1.3f      %2.6f \n',(i-1)*delx,y(i));
    end
    j=j+1;
    ulang=jend-j;
end
```

```

if j>=jend
    break;
else
    a(2)=0;
    b(2)=-2*am-2;
    c(2)=1;
    d(2)=-2*ya+(2-2*am)*y(2)-y(3);
    for i=3:n-1
        a(i)=1;
        b(i)=-2*am-2;
        c(i)=1;
        d(i)=-y(i-1)+(2-2*am)*y(i)-y(i+1);
    end
    a(n)=1;
    b(n)=-2*am-2;
    c(n)=0;
    d(n)=-y(n-1)+(2-2*am)*y(n)-2*yb;
    for i=3:n
        rasio=a(i)/b(i-1);
        b(i)=b(i)-rasio*c(i-1);
        d(i)=d(i)-rasio*d(i-1);
    end
    y(n)=d(n)/b(n);
    for i=n-1:-1:2
        y(i)=(d(i)-c(i)*y(i+1))/b(i);
    end
    j=j+1;
end
disp('-----');
end
disp('-----');
end

```

Keluaran program tersebut adalah sebagai berikut:

Masukkan nilai $Y_{in} = 0.5$
Masukkan nilai $Y_a = 1$
Masukkan nilai $Y_b = 0.2$
 $L = 1$
Banyaknya interval $x = 10$
Modulus (M) $= 4$
Batas J $= 2$
0 (t = 0.000)

x	y
0.000	0.500000
0.100	0.500000
0.200	0.500000
0.300	0.500000
0.400	0.500000
0.500	0.500000
0.600	0.500000
0.700	0.500000
0.800	0.500000
0.900	0.500000
1.000	0.500000

1 (t = 0.003)

x	y
0.000	1.000000
0.100	0.601021
0.200	0.510205
0.300	0.501031
0.400	0.500104
0.500	0.500004
0.600	0.499939
0.700	0.499382
0.800	0.493877
0.900	0.439388
1.000	0.200000

2 (t = 0.005)	
x	y
0.000	1.000000
0.100	0.664966
0.200	0.533330
0.300	0.505050
0.400	0.500674
0.500	0.500034
0.600	0.499602
0.700	0.496971
0.800	0.480002
0.900	0.401021
1.000	0.200000

11. Penyelesaian Persamaan Non-Linier Simultan

Bentuk umum persamaan non-linier simultan adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases}
 f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
 f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
 f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
 \vdots \\
 f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0
 \end{cases} \quad (4.148)$$

Dalam hal ini ingin dicari harga-harga $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang memenuhi persamaan (4.148).

Persamaan (4.148) bila ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\bar{F}(x) = \bar{0} \quad (4.149)$$

dengan:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}; \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk persamaan (4.149) mirip dengan bentuk persamaan untuk persamaan non linier tunggal yaitu:

$$F(x) = 0 \quad (4.150)$$

Hanya skalar diganti dengan matriks. Bila pada persamaan tunggal tersedia cara Newton-Rhapson maka pada persamaan simultan tersedia juga cara Newton-Rhapson dengan bentuk mirip, hanya skalar diganti matriks.

Rumus Newton-Rhapson untuk persamaan tunggal (bab 4.3) adalah:

$$x_{new} = x_{old} - \frac{f(x_{old})}{f'(x_{old})} = x_{old} - [f'(x_{old})]^{-1} \cdot f(x_{old}) \quad (4.151)$$

Rumus Newton-Rhapson untuk persamaan simultan berbentuk:

$$\bar{x}_{new} = \bar{x}_{old} - [\bar{J}(\bar{x}_{old})]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_{old}) \quad (4.152)$$

dengan

$$\bar{J}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Harga $[\bar{J}(\bar{x}_{old})]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_{old})$ bisa dihitung dengan cara sebagai berikut. Dimisalkan:

$$[\bar{J}(\bar{x}_{old})]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_{old}) = \bar{y} \quad (4.154)$$

$$\bar{J}(\bar{x}_{old})[\bar{J}(\bar{x}_{old})]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_{old}) = \bar{J}(\bar{x}_{old})\bar{y} \quad (4.155)$$

$$\bar{I}\bar{F}(\bar{x}_{old}) = \bar{J}(\bar{x}_{old})\bar{y} \quad (4.156)$$

$$\bar{J}(\bar{x}_{old})\bar{y} = \bar{F}(\bar{x}_{old}) \quad (4.157)$$

Persamaan (4.157) adalah persamaan linier simultan dalam $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ (pembaca yang belum jelas, dipersilahkan melihat kembali teori matriks), yang bisa diselesaikan dengan cara seperti pada bab 4.5. Diperoleh $\bar{y}$.

Jadi persamaan (4.152) dapat ditulis sebagai:

$$\bar{x}_{new} = \bar{x}_{old} - \bar{y} \quad (4.158)$$

Dengan $\bar{y}$ dicari dari persamaan (4.157). Dimulai dengan $\bar{x}_{old}$ tertentu kemudian diperbaiki secara iteratif dengan persamaan (4.158).

Bila $\bar{J}(\bar{x}_{old})$ sulit dicari secara analitis, maka dapat dipakai diferensial parsial numeris dengan cara analog dengan diferensiasi numeris pada bab 4.1. Misal dipakai cara *forward*, maka:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_{1old}, x_{2old}, \dots, x_{j-old}, \dots, x_{n-old}) \approx \frac{f_i(x_{1old}, \dots, x_{j-old} + \varepsilon, \dots, x_{n-old}) - f_i(x_{1old}, \dots, x_{j-old}, \dots, x_{n-old})}{\varepsilon} \quad (4.159)$$

Contoh program komputer untuk persamaan simultan n baris dan dipakai untuk persamaan (Burden, 1985):

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin(x_3) + 1,06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.160)$$

adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_410d
clc
clear all
xold=[0.1,0.1,-0.1];
eps=[0.001,0.001,0.001];
tol=[0.0001,0.0001,0.0001];
n=3;
x=xold;
fprintf('Jumlah persamaan = %1.0f \n',n);
for i=1:n
    fprintf('Harga awal x-%1.0f      = %2.4f \n',i,xold(i));
    fprintf('Interval diferensiasi ke x-%1.0f = %2.4f \n',i,eps(i));
    fprintf('Toleransi x-%1.0f      = %2.4f \n',i,tol(i));
    fprintf(' \n');
end
disp('-----');
disp('  x1      x2      x3      error  ');
disp('-----');
Fhitung=fungsi(x);
beda=sum(abs(Fhitung));
fprintf(' %2.6f  %2.6f  %2.6f  %2.6f \n',xold(1),xold(2),xold(3);beda;
```

```

loop1=0;
while loop1==0
    x=xold;
    B=fungsi(x);
    for j=1:n
        for k=1:n
            x(k)=xold(k);
            if k==j
                x(k)=x(k)+eps(k);
            end
        end
        Fhitung=fungsi(x);
        for i=1:n
            A(i,j)=(Fhitung(i)-B(i))/eps(j);
        end
    end
    for i=1:n-1
        imax=i;
        for ibar=i+1:n
            if abs(A(ibar,i))>abs(A(imax,i))
                imax=ibar;
            end
        end
        for ikol=i:n
            Asimp=A(i,ikol);
            A(i,ikol)=A(imax,ikol);
            A(imax,ikol)=Asimp;
        end
        Bsimp=B(i);
        B(i)=B(imax);
        B(imax)=Bsimp;
        for ibar=i+1:n
            rasio=A(ibar,i)/A(i,i);
            for ikol=i+1:n
                A(ibar,ikol)=A(ibar,ikol)-rasio*A(i,ikol);
            end
            B(ibar)=B(ibar)-rasio*B(i);
        end
    end
end

```

```

y(n)=B(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    y(i)=B(i);
    for j=i+1:n
        y(i)=y(i)-A(i,j)*y(j);
    end
    y(i)=y(i)/A(i,i);
end
for i=1:n
    xnew(i)=xold(i)-y(i);
end
x=xnew;
Fhitung=funksi(x);
beda=sum(abs(Fhitung));
fprintf(' %2.6f %2.6f %2.6f %2.6f \n',xnew(1),xnew(2),xnew(3),beda);
i=1;
loop2=0;
while loop2==0
    if abs(xnew(i)-xold(i))>tol(i)
        xold=xnew;
        loop2=1;
    elseif i>=n
        loop2=1;
        loop1=1;
        break;
    else
        i=i+1;
    end
end
end
disp('-----');
disp('Akar-akar persamaan: ');
disp('-----');
for i=1:n
    fprintf('x - %1.0f = %2.6e \n',i,xnew(i));
end
disp('-----');
end

```

```

function Fhit=fungsi(x)
x1=x(1);
x2=x(2);
x3=x(3);
F1=3*x1-cos(x2*x3)-0.5;
F2=x1^2-81*(x2+0.1)^2+sin(x3)+1.06;
F3=exp(-x1*x2)+20*x3+(10*pi-3)/3;
Fhit=[F1, F2, F3];
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

```

Jumlah persamaan = 3
Harga awal x-1      = 0.1000
Interval diferensiasi ke x-1 = 0.0010
Toleransi x-1       = 0.0001

Harga awal x-2      = 0.1000
Interval diferensiasi ke x-2 = 0.0010
Toleransi x-2       = 0.0001

Harga awal x-3      = -0.1000
Interval diferensiasi ke x-3 = 0.0010
Toleransi x-3       = 0.0001

-----
      x1      x2      x3      error
-----
0.100000  0.100000  -0.100000  11.931809
0.499870  0.019679  -0.521519  0.380636
0.500015  0.001696  -0.523554  0.027742
0.500000  0.000022  -0.523598  0.000363
0.500000  0.000000  -0.523599  0.000002
-----

```

Akar-akar persamaan:

```
-----  
x - 1 = 5.000000e-01  
x - 2 = 1.141591e-07  
x - 3 = -5.235988e-01  
-----
```

Selain dengan cara diatas, penyelesaian persamaan non-linear simultan dapat pula menggunakan toolbox **fsolve**. Adapun contoh programnya adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_410e  
clc  
clear all  
xold=[0.1,0.1,-0.1];  
n=3;  
xhit=fsolve(@fungsi,xold,opsi);  
disp('-----');  
disp('Akar-akar persamaan: ');  
disp('-----');  
for i=1:n  
    fprintf('x - %1.0f = %2.6e \n',i,xhit(i));  
end  
disp('-----');  
end  
  
function Fhit=fungsi(x)  
x1=x(1);  
x2=x(2);  
x3=x(3);  
F1=3*x1-cos(x2*x3)-0.5;  
F2=x1^2-81*(x2+0.1)^2+sin(x3)+1.06;  
F3=exp(-x1*x2)+20*x3+(10*pi-3)/3;  
Fhit=[F1, F2, F3];  
end
```

Keluaran program tersebut adalah:

Akar-akar persamaan:

$$x - 1 = 5.000000e-01$$

$$x - 2 = 7.767388e-10$$

$$x - 3 = -5.235988e-01$$

Nilai x_2 dari 2 program, yang nampak berbeda, pada hakekatnya praktis sama, karena sangat kecil, mendekati 0.

BAB 5

APLIKASI PENDEKATAN MATEMATIS DALAM TEKNIK KIMIA: PEMODELAN DAN PENYELESAIAN NUMERIS

Dalam bab ini ditunjukkan contoh-contoh aplikasi pendekatan matematis dalam teknik kimia yang mencakup pemodelan matematis dan penyelesaian numeris. Dalam pemodelan terlihat bahwa dasar-dasarnya adalah *chemical engineering tools*, terutama nomor satu sampai nomor empat, sedangkan pada penyelesaian numeris dipakai cara-cara yang diuraikan dalam bab 4 beserta kombinasi gabungannya. Contoh aplikasi yang ditunjukkan di sini sudah dicoba pada mahasiswa S1 semester 5, Jurusan Teknik Kimia, Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada, berupa tugas dan wajib diselesaikan dalam satu minggu. Dari hasil penerapan selama beberapa tahun terbukti bahwa para mahasiswa mampu mengikutinya. Contoh-contoh yang ditampilkan di sini dipilih dari subjek yang dibahas dalam berbagai mata kuliah, dengan maksud untuk menunjukkan luasnya penggunaan matematika dalam mata kuliah teknik kimia (matematika adalah bahasa teknik) dan menunjukkan bahwa ilmu teknik kimia merupakan satu kesatuan.

1. Pengaliran Fluida antara Dua Tangki dengan Pompa (Metoda Newton-Raphson)

Suatu cairan akan dialirkan dari tangki 1 ke 2 melalui pipa berdiameter D , dengan bantuan pompa. Panjang ekuivalen pipa, l_e diketahui (lihat Gambar 5.1). Karakteristik pompa sentrifugal yang dipakai berupa hubungan antara head pompa (H_m, cm) dengan debit ($Q, \frac{cm^3}{detik}$) dapat didekati dengan persamaan:

$$H_m = 3718,5 - 2,3496 Q + 7,8474 \cdot 10^{-4} Q^2 - 9,5812 \cdot 10^{-8} Q^3 \quad (5.1)$$

Ingin dihitung kecepatan aliran cairan dalam pipa (v) dan debit aliran Q . Persamaan Bernoulli antara titik 1 dan 2 (neraca energi mekanis):

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - F - W = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \quad (5.2)$$

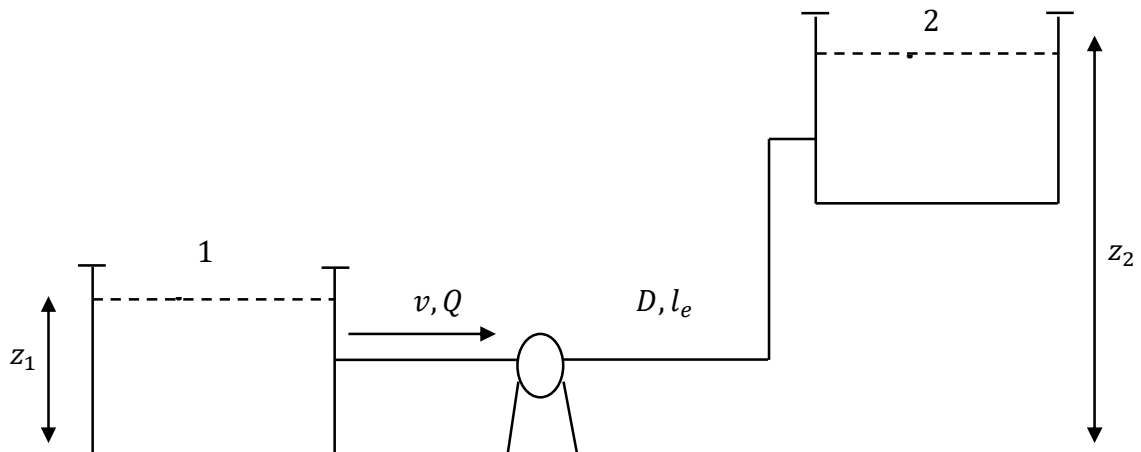
Dengan memakai *gauge pressure* (tekanan netto antara tekanan pada titik yang ditinjau dengan tekanan udara luar), maka harga-harga P_1 dan P_2 sama dengan nol. Dengan

asumsi bahwa diameter tangki cukup besar, harga-harga v_1 dan v_2 dapat dianggap nol. Sebagai hasilnya, persamaan (5.2) berubah menjadi:

$$z_2 - z_1 + F + W = 0 \quad (5.3)$$

$$z_2 - z_1 + \frac{f \cdot l_e \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D} - H_m = 0 \quad (5.4)$$

(*friction head* F didekati dengan persamaan d'Árcy, sedangkan kerja oleh cairan (W) pada pompa adalah $-H_m$).



Gambar 5.1. *Pengaliran cairan antara dua tangki dengan pompa*

Faktor friksi f , didekati dengan persamaan empiris:

$$f = \frac{0,0596}{Re^{0,215}} \quad (5.5)$$

dengan

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \text{ (bilangan Reynolds)} \quad (5.6)$$

Debit aliran dihitung dengan persamaan:

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 v \quad (5.7)$$

Diketahui harga-harga:

$$\rho = 1 \frac{g}{cm^3}; \mu = 0,01 \frac{g}{cm \cdot det}; g = 981 \frac{cm}{det^2}; z_1 = 300 \text{ cm}; z_2 = 800 \text{ cm};$$

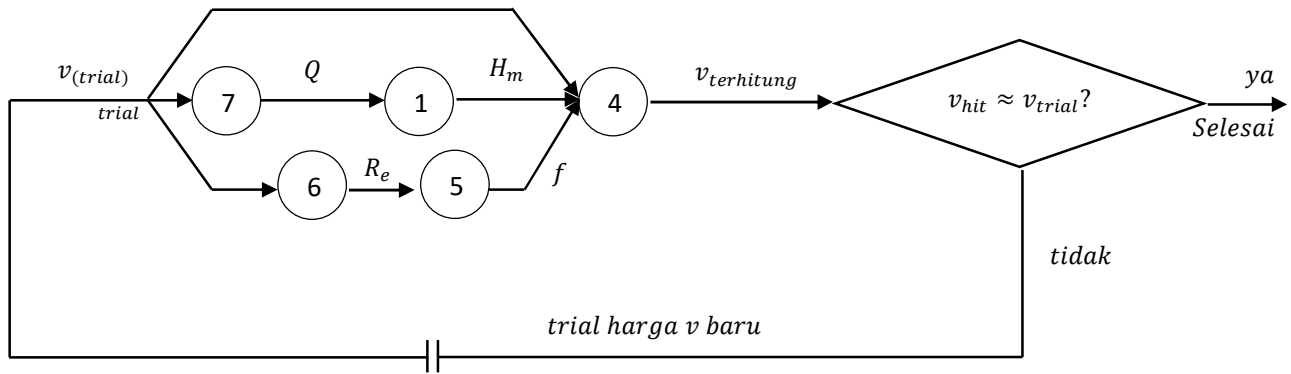
$$D = 4 \text{ cm}; l_e = 2000 \text{ cm}.$$

Dari persamaan-persamaan diatas dapat dilihat bahwa:

Bilangan-bilangan tak diketahui: v, Q, f, Re, H_m (5 buah)

Jumlah persamaan = 5 ((5.1), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7))

Dengan 5 buah bilangan tidak diketahui dan 5 persamaan, sistem persamaan tersebut dapat diselesaikan. Salah satu cara penyelesaian adalah dengan menggunakan *flowchart* hitungan berikut:



Gambar 5.2. *Flow-chart algoritma perhitungan dengan cara trial dan error*

Hitungan *trial* dan *error* diatas dapat diselesaikan dengan cara Newton-Rhapson, dengan memodifikasi persamaan (5.4) menjadi:

$$f(v) = z_2 - z_1 + \frac{f.l_e.v^2}{2.g.D} - H_m = 0 \quad (5.8)$$

(persoalan di atas berubah menjadi persoalan mencari akar persamaan non-linier). Dari persamaan (5.8) harus dicari harga v yang memberikan $f(v) = 0$, dengan metode Newton-Rhapson. Rumus yang dipakai adalah:

$$v_{new} = v_{old} - \frac{f(v_{old})}{f'(v_{old})} \quad (5.9)$$

Karena fungsi $f(v)$ sulit didiferensiasi secara analitis, maka dipakai diferensiasi numeris cara *central* (lihat bab 4.1). Program komputer yang disusun akan mempunyai program pokok (*body*) berupa Newton-Rhapson, dilengkapi dengan *subroutine* menghitung $f(v)$ (masukan v , keluaran $f(v)$). Berikut adalah contoh program komputer untuk pelaksanaan hitungannya. Untuk hitungan diambil v_{old} (awal) = $200 \frac{cm}{detik}$, toleransi harga $v = 0,001 \frac{cm}{detik}$ dan interval diferensiasi, $\varepsilon = 0,01$.

```

function Latihan_51a
clc
clear all
rho = input('Densitas cairan (g/cm^3)          = ');
mu  = input('Viskositas cairan (g/cm.det)       = ');
g   = input('Tetapan Grafitasi (cm/det^2)      = ');
z1  = input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 (cm) = ');
z2  = input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 (cm) = ');
d   = input('Diameter pipa (cm)                = ');
le  = input('Panjang Ekivalen pipa (cm)         = ');
v   = input('Perkiraan kecepatan aliran (cm/det) = ');
tol = input('Toleransi                          = ');
eps = input('Interval diferensiasi              = ');

vold=v;
FXold=f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g);
if FXold==0
    Q=pi*d.^2*v/4;
    disp('-----');
    disp('      Hasil Perhitungan      ');
    disp('-----');
    disp(['Kecepatan Aliran = ' num2str(v) ' cm/det']);
    disp(['Debit          = ' num2str(Q) ' cm^3/det']);
    disp(['Nilai FX       = ' num2str(FXold)]);
    disp('-----');
else
    ulang=1;
    while ulang==1
        v=vold+eps;
        FXplus=f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g);
        v=vold-eps;
        FXmin=f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g);
        dFdx=(FXplus-FXmin)/(2*eps);
        v=vold-FXold/dFdx;
        FXnew=f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g);
        if abs(v-vold)<tol
            Q=pi*d.^2*v/4;
            disp('-----');
            disp('      Hasil Perhitungan      ');
            disp('-----');
            disp(['Kecepatan Aliran = ' num2str(v) ' cm/det']);
            disp(['Debit          = ' num2str(Q) ' cm^3/det']);
            disp(['Nilai FX       = ' num2str(FXnew)]);
            disp('-----');
        end
    end
end

```

```

        break;
    else
        vold=v;
        FXold=FXnew;
    end
end
end
end

function FX=f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g)
Re=rho*v*d/mu;
f=0.0596/(Re.^0.215);
Q=pi*d.^2*v/4;
Hm=3718.5-2.3496*Q+7.8474E-4*Q.^2-9.5812E-8*Q.^3;
FX=z2-z1+f*le*v.^2/(2*g*d)-Hm;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Densitas cairan (g/cm ³)	= 1
Viskositas cairan (g/cm.det)	= 0.01
Tetapan Grafitasi (cm/det ²)	= 981
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 (cm)	= 300
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 (cm)	= 800
Diameter pipa (cm)	= 4
Panjang Ekuivalen pipa (cm)	= 20000
Perkiraan kecepatan aliran (cm/det)	= 200
Toleransi	= 0.001
Interval diferensiasi	= 0.01

 Hasil Perhitungan

Kecepatan Aliran	= 227.6735 cm/det
Debit	= 2861.03 cm ³ /det
Nilai FX	= 0

Selain menggunakan Newton Raphson dalam proses iterasi, anda dapat pula menggunakan *toolbox solver* yang disediakan oleh MATLAB. Penggunaan *solver* dalam proses iterasi untuk kasus ini dapat dilihat pada *listing* program berikut:

```
function Latihan_51
clc
clear all
rho =input('Densitas cairan (g/cm^3)          = ');
mu  =input('Viskositas cairan (g/cm.det)       = ');
g   =input('Tetapan Gravitasi (cm/det^2)      = ');
z1  =input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 (cm) = ');
z2  =input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 (cm) = ');
d   =input('Diameter pipa (cm)                = ');
le  =input('Panjang Ekvivalen pipa (cm)        = ');
v   =input('Perkiraan kecepatan aliran (cm/det) = ');

[v_hit,F_hit]=fzero(@(v) f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g),v);
Q=pi*d.^2*v_hit/4;
disp('-----');
disp('      Hasil Perhitungan      ');
disp('-----');
disp(['Kecepatan Aliran = ' num2str(v_hit) ' cm/det']);
disp(['Debit          = ' num2str(Q) ' cm^3/det']);
disp(['Nilai FX       = ' num2str(F_hit)]);
disp('-----');
end

function FX=f_Latihan_51(v,z1,z2,rho,d,mu,le,g)
Re=rho*v*d/mu;
f=0.0596/(Re.^0.215);
Q=pi*d.^2*v/4;
Hm=3718.5-2.3496*Q+7.8474E-4*Q.^2-9.5812E-8*Q.^3;
FX=z2-z1+f*le*v.^2/(2*g*d)-Hm;
end
```

Hasil perhitungan:

Densitas cairan (g/cm ³)	= 1
Viskositas cairan (g/cm.det)	= 0.01
Tetapan Grafitasi (cm/det ²)	= 981
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 (cm)	= 300
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 (cm)	= 800
Diameter pipa (cm)	= 4
Panjang Ekvivalen pipa (cm)	= 20000
Perkiraan kecepatan aliran (cm/det)	= 200

Hasil Perhitungan	

Kecepatan Aliran	= 227.6735 cm/det
Debit	= 2861.03 cm ³ /det
Nilai FX	= 0

2. Waktu Pengaliran antara Dua Tangki dengan Pompa (Kombinasi antara Integrasi Cara Simpson dan Metoda Newton-Raphson)

Sebagai kelanjutan pembahasan contoh aplikasi 1, diinginkan untuk menghitung waktu yang diperlukan untuk mengisi tangki 2 sehingga permukaan cairan di tangki 2 naik dari z_{2i} sampai z_{2f} . Tinggi permukaan cairan pada tangki 1 mula-mula z_{1i} . Diameter tangki 1 dan tangki 2 masing-masing adalah D_{t1} dan D_{t2} (lihat Gambar 5.3). Perlu diperhatikan bahwa debit aliran tidak tetap karena adanya perubahan tinggi permukaan cairan di tangki 1 dan tangki 2.

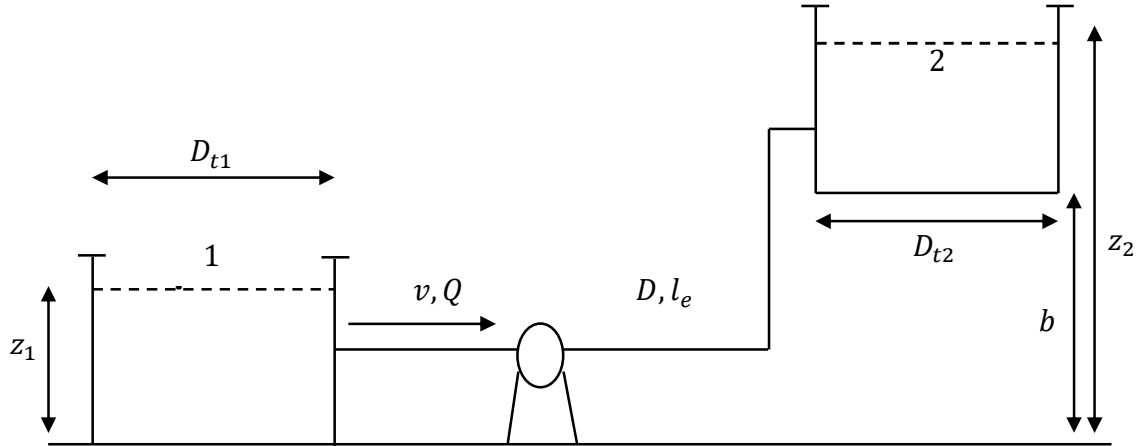
Neraca massa cairan di tangki 2:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 v \cdot \rho - 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} \cdot D_{t2}^2 \cdot (z_2 - b) \rho \right) \quad (5.10)$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 v \cdot \rho = \frac{\pi}{4} \cdot D_{t2}^2 \cdot \rho \frac{dz_2}{dt} \quad (5.11)$$

$$dt = \left(\frac{D_{t2}}{D} \right)^2 \frac{1}{v} \cdot dz_2 \quad (5.12)$$



Gambar 5.3. Skema sistem aliran dengan pompa

Integrasi persamaan (5.12) menghasilkan:

$$t = \left(\frac{D_{t2}}{D} \right)^2 \int_{z_{2i}}^{z_{2f}} \frac{1}{v} dz_2 \quad (5.13)$$

Neraca massa cairan dalam tangki 1 dan 2:

$$\frac{\pi}{4} \cdot D_{t1}^2 \cdot z_{1i} \cdot \rho + \frac{\pi}{4} \cdot D_{t2}^2 \cdot (z_{2i} - b) \rho = \frac{\pi}{4} \cdot D_{t1}^2 \cdot z_1 \cdot \rho + \frac{\pi}{4} \cdot D_{t2}^2 \cdot (z_2 - b) \rho \quad (5.14)$$

$$z_1 = z_{1i} - \left(\frac{D_{t2}}{D_{t1}} \right)^2 \cdot (z_2 - z_{2i}) \quad (5.15)$$

Persamaan-persamaan lain yang terlibat adalah seperti pada contoh aplikasi 1:

$$f(v) = z_2 - z_1 + \frac{f \cdot l_e \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D} - H_m = 0 \quad (5.8)$$

$$H_m = 3718,5 - 2,3496 Q + 7,8474 \cdot 10^{-4} Q^2 - 9,5812 \cdot 10^{-8} Q^3 \quad (5.1)$$

$$f = \frac{0,0596}{Re^{0,215}} \quad (5.5)$$

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \text{ (bilangan Reynolds)} \quad (5.6)$$

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 v \quad (5.7)$$

Jadi waktu pengisian tangki t , dapat dihitung dengan menerapkan integrasi cara Simpson untuk persamaan (5.13), dengan bantuan persamaan-persamaan (5.15), (5.8), (5.1), (5.5), (5.6), dan (5.7). Persamaan (5.13) dapat ditulis sebagai:

$$t = \left(\frac{D_{t2}}{D} \right)^2 \int_{z_{2i}}^{z_{2f}} h(z_2) dz_2 \quad (5.16)$$

dengan:

$$h(z_2) = \frac{1}{v} \quad (5.17)$$

Dalam hal ini diperlukan perhitungan harga-harga $h(z_2)$ pada berbagai z_2 . Caranya adalah: untuk suatu harga z_2 dihitung z_1 dengan persamaan (5.15), kemudian berdasarkan z_1 dan z_2 , harga v dan harga $h(z_2)$ masing-masing dapat dihitung dengan penerapan metode Newton Rhapsion atas persamaan (5.8) (lihat contoh aplikasi 1).

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

- a. Program pokok: Integrasi cara Simpson

Isi: $\int h(z_2) dz_2$

- b. *Subroutine*: masukan z_2 keluaran $h(z_2) = \frac{1}{v}$

Isi: persamaan (5.15)

Metode Newton Rhapsion $f(v) = 0$

- c. *Sub-subroutine*: masukan v keluaran $f(v)$

Isi: persamaan (5.8), (5.1), (5.5), (5.6), dan (5.7)

Contoh program komputer untuk pelaksanaan hitungan adalah sebagai berikut
($\rho = 1 \frac{g}{cm^3}$; $\mu = 0,01 \frac{g}{cm.det}$; $g = 981 \frac{cm}{det^2}$; $D = 4 cm$; $l_e = 2000 cm$; $D_{t1} = 350 cm$; $D_{t2} = 300 cm$; $z_{1i} = 500 cm$; $z_{2i} = 600 cm$; $z_{2f} = 1000 cm$):

```
function Latihan_52b
clc
clear all
rho = input('Densitas cairan (g/cm^3)')           = ');
mu = input('Viskositas cairan (g/cm.det)')         = ');
g = input('Tetapan Gravitasi (cm/det^2)')          = ');
z1i = input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 mula-mula (cm) = ');
z2i = input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 mula-mula (cm) = ');
z2f = input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 akhir (cm) = ');
dt1 = input('Diameter tangki 1 (cm)')               = ');
dt2 = input('Diameter tangki 2 (cm)')               = ');
d = input('Diameter pipa (cm)')                    = ');
le = input('Panjang Ekuivalen pipa (cm)')           = ');
v = input('Perkiraan kecepatan aliran (cm/det)')   = ');
tol = input('Toleransi')                            = ');
eps = input('Interval diferensiasi')                = ');
```

```

disp('-----');
disp('          Hasil Integrasi          ');
disp('-----');
disp('  z2    z1    v    f(v)    1/v  ');
disp('-----');
hasil_integral=f1_Latihan_52(v,z1i,z2i,z2f,rho,mu,g,dt1,dt2,d,le,tol,eps);
t_hit=(dt2/d).^2*hasil_integral;
t_menit=t_hit/60;

disp('-----');
disp('          Hasil Perhitungan          ');
disp('-----');
disp(['Waktu Pengaliran = ' num2str(t_hit) ' detik']);
disp(['Waktu Pengaliran = ' num2str(t_menit) ' menit']);
disp('-----');
end

function FX_hit=f1_Latihan_52(v,z1i,z2i,z2f,rho,mu,g,dt1,dt2,d,le,tol,eps)
n=10;
h=(z2f-z2i)/n;
for i=1:(n+1)
    z2=z2i+h*(i-1);
    z1=z1i-(z2-z2i)*(dt2/dt1).^2;
    v_hit=hitung_iterasi(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le,tol,eps);
    fx_hit=v_hit(1);
    f_hit(i)=1/v_hit(2);
    fprintf(' %2.0f %3.4f %3.4f %1.6e %1.6e \n',z2,z1,v_hit(2),fx_hit,f_hit(i));
end
hitung=f_hit(1)+4*sum(f_hit(2:2:n))+2*sum(f_hit(3:2:n-1))+f_hit(n+1);
FX_hit=h*hitung/3;
end

function FXX=hitung_iterasi(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le,tol,eps)
vold=v;
FXold=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le);
if FXold==0
    FXX=[FXold,vold];
else
    ulang=1;
    while ulang==1
        v=vold+eps;
        FXplus=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le);
        v=vold-eps;
        FXmin=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le);
        dFdx=(FXplus-FXmin)/(2*eps);
    end
end

```

```

v=vold-FXold/dFdx;
FXnew=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le);
if abs(vold-v)<tol
    FXX=[FXnew,vold];
    Break;
else
    vold=v;
    FXold=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le);
end
end
end
end

function FX=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le)
Re=rho*v*d/mu;
f=0.0596/(Re.^0.215);
Q=pi*d.^2*v/4;
Hm=3718.5-2.3496*Q+7.8474E-4*Q.^2-9.5812E-8*Q.^3;
FX=z2-z1+f*le*v.^2/(2*g*d)-Hm;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Densitas cairan (g/cm ³)	= 1
Viskositas cairan (g/cm.det)	= 0.01
Tetapan Grafitasi (cm/det ²)	= 981
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 mula-mula (cm)	= 500
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 mula-mula (cm)	= 600
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 akhir (cm)	= 1000
Diameter tangki 1 (cm)	= 350
Diameter tangki 2 (cm)	= 300
Diameter pipa (cm)	= 4
Panjang Ekuivalen pipa (cm)	= 20000
Perkiraan kecepatan aliran (cm/det)	= 200
Toleransi	= 0.001
Interval diferensiasi	= 0.01

Hasil Integrasi				
z2	z1	v	f(v)	1/v

600	500.0000	272.0992	5.666607e-09	3.675130e-03
640	470.6122	265.2619	3.481091e-10	3.769859e-03
680	441.2245	258.0648	1.205080e-11	3.874996e-03
720	411.8367	250.4955	9.094947e-13	3.992087e-03
760	382.4490	242.5521	-9.094947e-13	4.122826e-03
800	353.0612	234.2476	0.000000e+00	4.268988e-03
840	323.6735	225.6157	8.881216e-10	4.432315e-03
880	294.2857	216.7146	1.591616e-12	4.614364e-03
920	264.8980	207.6270	-6.821210e-13	4.816328e-03
960	235.5102	198.4560	-7.707968e-11	5.038901e-03
1000	206.1224	189.3138	-4.547474e-13	5.282234e-03

Hasil Perhitungan				

Waktu Pengaliran = 9764.0343 detik				
Waktu Pengaliran = 162.7339 menit				

Apabila proses iterasi menggunakan *toolbox fzero*, *listing* program menjadi lebih sederhana:

```
function Latihan_52a
clc
clear all
rho =input('Densitas cairan (g/cm^3)           = ');
mu  =input('Viskositas cairan (g/cm.det)        = ');
g   =input('Tetapan Grafitasi (cm/det^2)       = ');
z1i =input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 mula-mula (cm) = ');
z2i =input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 mula-mula (cm) = ');
z2f =input('Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 akhir (cm)   = ');
dt1 =input('Diameter tangki 1 (cm)             = ');
dt2 =input('Diameter tangki 2 (cm)             = ');
d   =input('Diameter pipa (cm)                 = ');
le  =input('Panjang Ekivalen pipa (cm)         = ');
v   =input('Perkiraan kecepatan aliran (cm/det) = ');

hasil_integral=f1_Latihan_52(v,z1i,z2i,z2f,rho,mu,g,dt1,dt2,d,le);
t_hit=(dt2/d).^2*hasil_integral;
t_menit=t_hit/60;

disp('-----');
disp('      Hasil Perhitungan      ');
disp('-----');
disp(['Waktu Pengaliran = ' num2str(t_hit) ' detik']);
disp(['Waktu Pengaliran = ' num2str(t_menit) ' menit']);
disp('-----');
end

function FX_hit=f1_Latihan_52(v,z1i,z2i,z2f,rho,mu,g,dt1,dt2,d,le)
n=20;
h=(z2f-z2i)/n;
for i=1:(n+1)
    z2=z2i+h*(i-1);
    z1=z1i-(z2-z2i)*(dt2/dt1).^2;
    [v_hit,F_hit]=fzero(@(v) f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le),v);
    f_hit(i)=1/v_hit;
end
hitung=f_hit(1)+4*sum(f_hit(2:2:n))+2*sum(f_hit(3:2:n-1))+f_hit(n+1);
FX_hit=h*hitung/3;
end
```

```

function FX=f2_Latihan_52(v,z1,z2,rho,mu,g,d,le)
Re=rho*v*d/mu;
f=0.0596/(Re.^0.215);
Q=pi*d.^2*v/4;
Hm=3718.5-2.3496*Q+7.8474E-4*Q.^2-9.5812E-8*Q.^3;
FX=z2-z1+f*le*v.^2/(2*g*d)-Hm;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Densitas cairan (g/cm ³)	= 1
Viskositas cairan (g/cm.det)	= 0.01
Tetapan Grafitasi (cm/det ²)	= 981
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 1 mula-mula (cm)	= 500
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 mula-mula (cm)	= 600
Tinggi Permukaan Cairan pada Tangki 2 akhir (cm)	= 1000
Diameter tangki 1 (cm)	= 350
Diameter tangki 2 (cm)	= 300
Diameter pipa (cm)	= 4
Panjang Ekivalen pipa (cm)	= 2000
Perkiraan kecepatan aliran (cm/det)	= 200

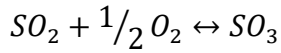
 Hasil Perhitungan

Waktu Pengaliran = 9764.0343 detik

Waktu Pengaliran = 162.7339 menit

3. Optimasi Suhu Masuk Reaktor Adiabatis, Reaksi Bolak-Balik Eksotermis (Kombinasi Golden-Section dan Simpson's Rule)

Reaksi fasa gas bolak-balik eksotermis:



dijalankan dalam reaktor tabung *adiabatis* dengan bantuan katalisator padat berbentuk butir-butir. Aliran gas dianggap *plug flow*. Konversi SO_2 keluar reaktor diharapkan $x_{out} = 0,64$. Karena reaktor bekerja *adiabatis*, sedangkan reaksinya *eksotermis*, maka sambil berjalan sepanjang reaktor suhu gas akan naik. Pada reaksi bolak-balik *eksotermis*, suhu perlu dioptimumkan, karena jika suhu terlalu rendah maka kecepatan reaksi akan rendah, akan tetapi jika suhu terlalu tinggi, kesetimbangan reaksi bergeser ke kiri (prinsip kesetimbangan). Karena reaktor bekerja adiabatis, yang bisa diatur adalah suhu umpan reaktor (T_0). Jadi dalam hal ini, ingin ditentukan suhu umpan reaktor optimum, agar untuk mendapatkan konversi SO_2 $x_{out} = 0,64$, diperlukan jumlah katalisator (W) yang minimum. Kecepatan reaksi mengikuti persamaan (Froment and Bischoff, 1990) minimum:

$$r \left(\frac{gmol\ SO_2}{jam \times kg\ katalisator} \right) = \frac{k_1 \cdot P_{O_2} \cdot P_{SO_2} \left(1 - \frac{P_{SO_3}}{P_{SO_2} \cdot P_{O_2}^{1/2} \cdot K_p} \right)}{22,414 \cdot (1 + K_2 \cdot P_{SO_2} + K_3 \cdot P_{SO_2})^2} \quad (5.18)$$

dengan

$$k_1 = \exp \left(12,16 - \frac{5473}{T} \right) \quad (5.19)$$

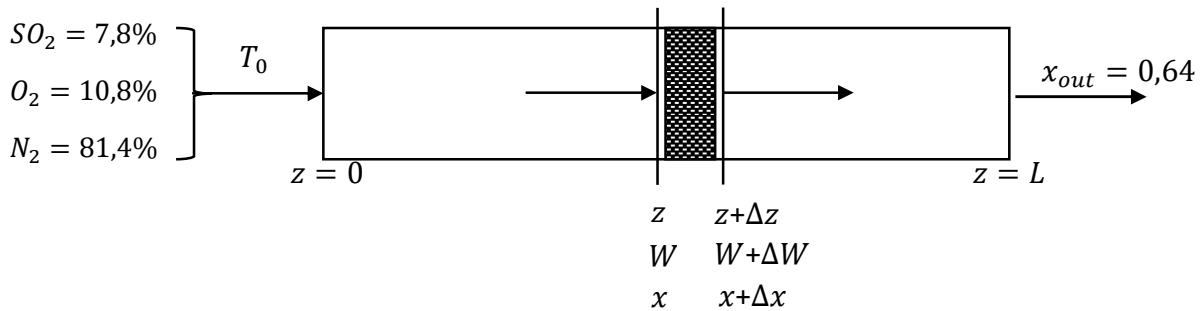
$$K_2 = \exp \left(-9,953 + \frac{8619}{T} \right) \quad (5.20)$$

$$K_3 = \exp \left(-71,745 - \frac{52956}{T} \right) \quad (5.21)$$

$$K_p = \exp \left(-10,68 - \frac{11300}{T} \right) \quad (5.22)$$

Umpan reaktor berjumlah 55000 kg/jam, dengan komposisi mol: $SO_2 = 7,8\%$; $O_2 = 10,8\%$ dan $N_2 = 81,4\%$. Tekanan dianggap tetap 1 atm.

Dimisalkan x = konversi SO_2 .



Gambar 5.4. Elemen volum pada reaktor plug-flow

Berat molekul (BM) rata-rata gas masuk

$$BM = 0,078 \times 64 + 0,108 \times 32 + 0,814 \times 28$$

$$BM = 31,2 \text{ kg/kgmol}$$

Nilai BM rata-rata gas sepanjang reaktor dianggap tetap sama dengan pada gas masuk (karena kadar SO₂ relatif kecil), sehingga laju mol aliran gas total dianggap tetap.

$$(F) = 55000 \frac{\text{kg}}{\text{jam}} \times \frac{1}{31,24} \frac{\text{kgmol}}{\text{kg}}$$

$$F = 1761 \frac{\text{kgmol}}{\text{jam}}$$

Kecepatan umpan masing-masing komponen

$$(F_{SO_2})_0 = 0,078 \times 1761 \frac{\text{gmol}}{\text{jam}} = 137,3 \frac{\text{gmol}}{\text{jam}}$$

$$(F_{O_2})_0 = 0,108 \times 1761 \frac{\text{gmol}}{\text{jam}} = 190,2 \frac{\text{gmol}}{\text{jam}}$$

$$(F_{N_2})_0 = 0,814 \times 1761 \frac{\text{gmol}}{\text{jam}} = 1433,5 \frac{\text{gmol}}{\text{jam}}$$

Neraca massa SO₂ pada elemen volum:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} - \text{Rate of Reaction} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$F_{SO_2}|_w - F_{SO_2}|_{w+\Delta w} - \Delta W \cdot \bar{r} = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{F_{SO_2}|_{w+\Delta w} - F_{SO_2}|_w}{\Delta W} = -\bar{r} \quad (5.24)$$

Jika diambil $\Delta W \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{dF_{SO_2}}{dW} = -r \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{dW} \left((F_{SO_2})_0 (1 - x) \right) = -r \quad (5.26)$$

$$-(F_{SO_2})_0 \cdot dx = -r \cdot dW \quad (5.27)$$

Diperoleh persamaan:

$$W = 137,3 \int_{x=0}^{x=0,64} \left(\frac{1}{r}\right) dx \quad (5.28)$$

Persamaan-persamaan untuk P_{SO_2} , P_{O_2} dan P_{SO_3} dapat dicari dengan persamaan stoikiometri.

Laju mol tiap komponen pada umpan adalah:

$$(F_{SO_2})_0 = (F_{SO_2})_0$$

$$(F_{O_2})_0 = \frac{0,108}{0,078} (F_{SO_2})_0 = 1,3846 (F_{SO_2})_0$$

$$(F_{N_2})_0 = \frac{0,814}{0,078} (F_{SO_2})_0 = 10,440 (F_{SO_2})_0$$

$$\text{Laju mol total umpan} = (F_{SO_2})_0 + (F_{O_2})_0 + (F_{N_2})_0 = 12,82 (F_{SO_2})_0$$

Pada saat konversi $SO_2 = x$, laju mol tiap komponen adalah:

$$(F_{SO_2})_x = (F_{SO_2})_0 (1 - x)$$

$$(F_{O_2})_x = 1,3846 (F_{SO_2})_0 - \frac{1}{2} (F_{SO_2})_0 x = (F_{SO_2})_0 \cdot (1,3846 - 0,5x)$$

$$(F_{SO_3})_x = (F_{SO_2})_0 x$$

$$(F_{N_2})_x = 10,440 (F_{SO_2})_0 = \text{tetap}$$

Laju mol total saat konversi $SO_2 = x$ adalah:

$$(F_t)_x = (F_{SO_2})_0 (12,82 - 0,5x)$$

Tekanan parsial:

$$P_{SO_2} = y_{SO_2} \cdot P_t = \frac{(F_{SO_2})_0 (1-x)}{(F_{SO_2})_0 (12,82-0,5x)} \cdot P_t = \frac{(1-x)}{(12,82-0,5x)} \cdot P_t \quad (5.29)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$P_{O_2} = y_{O_2} \cdot P_t = \frac{(1,3846-0,5x)}{(12,82-0,5x)} \cdot P_t \quad (5.30)$$

$$P_{SO_3} = y_{SO_3} \cdot P_t = \frac{x}{(12,82-0,5x)} \cdot P_t \quad (5.31)$$

Neraca panas pada elemen volum:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} - \text{Rate of Reaction} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$H|_x - H|_{x+\Delta x} + (F_{SO_2})_0 \cdot \Delta x \cdot \lambda = 0 \quad (5.32)$$

dengan

$$H = \text{Entalphy bahan total}$$

$$\lambda = \text{Panas reaksi (dianggap tetap pada semua suhu)}$$

Entalpi semua gas pada suhu referensi adalah 0.

$$\frac{H|_x - H|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = (F_{SO_2})_0 \cdot \lambda \quad (5.33)$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{dH}{dx} = (F_{SO_2})_0 \cdot \lambda \quad (5.34)$$

$$F_t \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dx} = (F_{SO_2})_0 \cdot \lambda \quad (5.35)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(F_{SO_2})_0 \cdot \lambda}{F_t \cdot c_p} \quad (5.36)$$

Jika F_t dan c_p dianggap tetap karena kadar gas inert (N_2) cukup besar, maka diperoleh:

$$\int_{T_0}^T dT = \frac{(F_{SO_2})_0 \cdot \lambda}{F_t \cdot c_p} \int_0^x dx \quad (5.37)$$

$$T - T_0 = \frac{(F_{SO_2})_0 \cdot \lambda}{F_t \cdot c_p} \cdot x \quad (5.38)$$

Dapat dihitung/diketahui bahwa $\frac{(F_{SO_2})_0 \cdot \lambda}{F_t \cdot c_p} = 241,7$ sehingga

$$T = T_0 + 241,7 \cdot x \quad (5.39)$$

Jika T_0 ditentukan, maka berdasarkan (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.28), (5.29), (5.30), (5.31) dan (5.39) dapat dihitung harga W , menggunakan integrasi numeris Simpson. Jadi dalam rangka mencari T_0 yang memberikan harga W minimum dapat dicoba berbagai harga T_0 sampai diperoleh harga W terkecil (minimasi $W = f(T_0)$). Minimasi dengan satu variabel tersebut dapat dijalankan dengan *golden section*.

Struktur program komputer untuk kasus ini adalah:

- a. Program pokok: minimasi $W = f(T_0)$ dengan *golden section*
- b. *Subroutine*: Integrasi Simpson dari persamaan (5.28)

$$W = \int_0^{x_{out}} \left(\frac{1}{r} \right) dx$$

Masukan T_0 keluaran W

- c. *Sub-subroutine*: masukan x keluaran $\left(\frac{1}{r} \right)$.

Isi: persamaan-persamaan (5.39), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.28), (5.29), (5.30), dan (5.18).

Contoh program komputer dalam MATLAB adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_53b
clc
clear all
T0A = input('Batas Bawah Suhu Umpan (K) = ');
T0B = input('Batas Atas Suhu Umpan (K) = ');
xin = input('Konversi Masuk Reaktor = ');
xout = input('Konversi Keluar Reaktor = ');
Pt = input('Tekanan Total Reaktor = ');
tol = input('Toleransi = ');
Tdata=[T0A, T0B];
disp('-----');
disp('    T0A        T0B        WA        WB ');
disp('-----');
Thit=optimasi_T(Tdata,xin,xout,Pt,tol);
T0=Thit(1);
Whit=137.3*f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
disp('-----');
disp('          Hasil Perhitungan          ');
disp('-----');
disp(['Suhu Masuk Reaktor Optimum = ' num2str(T0) ' K']);
disp(['Berat Katalis Minimum      = ' num2str(Whit) ' Kg']);
disp('-----');
end

function Thitung=optimasi_T(Tdata,xin,xout,Pt,tol)
T0A=Tdata(1);
T0B=Tdata(2);
al=(sqrt(5)-1)/2;
T0p=T0A+(1-al)*(T0B-T0A);
T0q=T0A+al*(T0B-T0A);
T0data=[T0A; T0B; T0p; T0q];
for i=1:4
    T0=T0data(i);
    fxhit(i)=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
end

```

```

fxa=fxhit(1);
fxb=fxhit(2);
fxp=fxhit(3);
fxq=fxhit(4);
ulang=1;
while ulang==1
    fprintf(' %2.6f  %2.6f  %2.6e  %2.6e \n',T0A,T0B,fxa,fxb);
    if abs(T0B-T0A)<=tol
        T0opt=(T0B+T0A)/2;
        T0=T0opt;
        fopt=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
        break;
    else
        if fxp<fxq
            T0B=T0q;
            fxb=fxq;
            T0q=T0p;
            fxq=fxp;
            T0p=T0A+(1-al)*(T0B-T0A);
            T0=T0p;
            fxp=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
        else
            T0A=T0p;
            fxa=fxp;
            T0p=T0q;
            fxp=fxq;
            T0q=T0A+al*(T0B-T0A);
            T0=T0q;
            fxq=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
        end
    end
end
Thitung=[T0opt, fopt];
end

```

```

function FR_hit=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt)
n=60;
h=(xout-xin)/n;
for i=1:(n+1)
    x=xin+h*(i-1);
    FR(i)=f2_Latihan_53(x,T0,xin,Pt);
end
hitung=FR(1)+4*sum(FR(2:2:n))+2*sum(FR(3:2:n-1))+FR(n+1);
FR_hit=137.3*h*hitung/3;
end

function FRR=f2_Latihan_53(x,T0,xin,Pt)
T=T0+241.7*(x-xin);
PSO2=(1-x)*Pt/(12.82-0.5*x);
PSO3=x*Pt/(12.82-0.5*x);
PO2=(1.3846-0.5*x)*Pt/(12.82-0.5*x);
K1=exp(12.16-5473/T);
K2=exp(-9.953+8619/T);
K3=exp(-71.745+52596/T);
KP=exp(11300/T-10.68);
R1=K1*PO2*PSO2*(1-PSO3/(PSO2*PO2.^0.5*KP));
R2=22.414*(1+K2*PSO2+K3*PSO3).^2;
R=R1/R2;
FRR=1/R;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Batas Bawah Suhu Umpan (K) = 600
Batas Atas Suhu Umpan (K) = 750
Konversi Masuk Reaktor = 0
Konversi Keluar Reaktor = 0.64
Tekanan Total Reaktor = 1
Toleransi = 0.1

TOA	TOB	WA	WB
600.000000	750.000000	3.951444e+10	6.005804e+03
657.294902	750.000000	2.972994e+04	6.005804e+03
692.705098	750.000000	4.968884e+03	6.005804e+03
714.589803	750.000000	3.582701e+03	6.005804e+03
728.115295	750.000000	3.147306e+03	6.005804e+03
736.474508	750.000000	3.011633e+03	6.005804e+03
736.474508	744.833722	3.011633e+03	3.079715e+03
736.474508	741.640786	3.011633e+03	3.009881e+03
738.447851	741.640786	3.000462e+03	3.009881e+03
738.447851	740.421194	3.000462e+03	3.001360e+03
738.447851	739.667444	3.000462e+03	2.999355e+03
738.913694	739.667444	2.999455e+03	2.999355e+03
739.201601	739.667444	2.999184e+03	2.999355e+03
739.201601	739.489508	2.999184e+03	2.999198e+03
739.201601	739.379537	2.999184e+03	2.999159e+03
739.269566	739.379537	2.999162e+03	2.999159e+03
739.311571	739.379537	2.999155e+03	2.999159e+03
739.311571	739.353577	2.999155e+03	2.999156e+03
739.311571	739.337532	2.999155e+03	2.999155e+03
739.321488	739.337532	2.999155e+03	2.999155e+03
739.327616	739.337532	2.999155e+03	2.999155e+03

Hasil Perhitungan

Suhu Masuk Reaktor Optimum = 739.3326 K
Berat Katalis Minimum = 2999.1547 Kg

Selain menggunakan cara diatas, dapat pula digunakan *toolbox fminbnd* untuk optimasi satu variabel. Adapun listing programnya adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_53
clc
clear all
T0A=input('Batas Bawah Suhu Umpan (K) = ');
T0B=input('Batas Atas Suhu Umpan (K) = ');
xin=input('Konversi Masuk Reaktor = ');
xout=input('Konversi Keluar Reaktor = ');
Pt=input('Tekanan Total Reaktor = ');

Thit=fminbnd(@(T0) f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt),T0A,T0B);
T0=Thit;
Whit=137.3*f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
disp('-----');
disp('      Hasil Perhitungan      ');
disp('-----');
disp(['Suhu Masuk Reaktor Optimum = ' num2str(Thit) ' K']);
disp(['Berat Katalis Minimum = ' num2str(Whit) ' Kg']);
disp('-----');
end

function FR_hit=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt)
n=60;
h=(xout-xin)/n;
for i=1:(n+1)
    x=xin+h*(i-1);
    FR(i)=f2_Latihan_53(x,T0,xin,Pt);
end
hitung=FR(1)+4*sum(FR(2:2:n))+2*sum(FR(3:2:n-1))+FR(n+1);
FR_hit=137.3*h*hitung/3;
end
```

```

function FRR=f2_Latihan_53(x,T0,xin,Pt)
T=T0+241.7*(x-xin);
PSO2=(1-x)*Pt/(12.82-0.5*x);
PSO3=x*Pt/(12.82-0.5*x);
PO2=(1.3846-0.5*x)*Pt/(12.82-0.5*x);
K1=exp(12.16-5473/T);
K2=exp(-9.953+8619/T);
K3=exp(-71.745+52596/T);
KP=exp(11300/T-10.68);
R1=K1*PO2*PSO2*(1-PSO3/(PSO2*PO2.^0.5*KP));
R2=22.414*(1+K2*PSO2+K3*PSO3).^2;
R=R1/R2;
FRR=1/R;
end

```

Keluaran program tersebut adalah:

Batas Bawah Suhu Umpan (K)	= 600
Batas Atas Suhu Umpan (K)	= 750
Konversi Masuk Reaktor	= 0
Konversi Keluar Reaktor	= 0.64
Tekanan Total Reaktor	= 1

Hasil Perhitungan

Suhu Masuk Reaktor Optimum	= 739.3456 K
Berat Katalis Minimum	= 2999.155 Kg

Pada program Latihan_53, optimasi satu variabel diselesaikan dengan *toolbox fminbnd* namun integrasi menggunakan metode numerik Newton-Raphson. Selain dengan cara tersebut, integrasi dapat diselesaikan dengan menggunakan *toolbox* integral. Berikut ini disajikan program dengan menggunakan kedua *toolbox* diatas.

```
function Latihan_53a
clc
clear all
T0A=input('Batas Bawah Suhu Umpan (K) = ');
T0B=input('Batas Atas Suhu Umpan (K) = ');
xin=input('Konversi Masuk Reaktor = ');
xout=input('Konversi Keluar Reaktor = ');
Pt=input('Tekanan Total Reaktor = ');

Thit=fminbnd(@(T0) f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt),T0A,T0B);
T0=Thit;
Whit=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt);
disp('-----');
disp('      Hasil Perhitungan      ');
disp('-----');
disp(['Suhu Masuk Reaktor Optimum = ' num2str(Thit) ' K']);
disp(['Berat Katalis Minimum = ' num2str(Whit) ' Kg']);
disp('-----');
end

function FR_hit=f1_Latihan_53(T0,xin,xout,Pt)
FR_hit=137.3*integral(@(x) f2_Latihan_53(x,T0,xin,Pt),xin,xout);
end

function FRR=f2_Latihan_53(x,T0,xin,Pt)
T=T0+241.7*(x-xin);
PSO2=(1-x)*Pt./(12.82-0.5*x);
PSO3=x*Pt./(12.82-0.5*x);
PO2=(1.3846-0.5*x)*Pt./(12.82-0.5*x);
K1=exp(12.16-5473./T);
K2=exp(-9.953+8619./T);
K3=exp(-71.745+52596./T);
KP=exp(11300./T-10.68);
R1=K1.*PO2.*PSO2.*(1-PSO3./(PSO2.*PO2.^0.5.*KP));
R2=22.414.*(1+K2.*PSO2+K3.*PSO3).^2;
R=R1./R2;
FRR=1./R;
end
```

Hasil run program

Batas Bawah Suhu Umpan (K)	= 600
Batas Atas Suhu Umpan (K)	= 750
Konversi Masuk Reaktor	= 0
Konversi Keluar Reaktor	= 0.64
Tekanan Total Reaktor	= 1

Hasil Perhitungan	

Suhu Masuk Reaktor Optimum	= 739.3456 K
Berat Katalis Minimum	= 2999.155 Kg

4. Integrasi Menggunakan Pendekatan Polinomial

Diketahui data kapasitas panas, $C_p \left(\frac{\text{cal}}{\text{gmol/K}} \right)$, pada berbagai suhu, $T(\text{K})$, sebagai berikut:

T	400	475	520	580	660	750	850
C_p	41,29	45,50	48,00	51,31	55,61	60,30	65,26

Ingin dihitung panas yang diperlukan untuk memanaskan 1 gmol gas tersebut pada tekanan tetap dari $T_1 = 525\text{K}$ sampai $T_2 = 810\text{K}$.

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT \quad (5.40)$$

Karena interval data tidak teratur, maka integrasi numeris dengan *trapezoidal rule* maupun *Simpson's rule* tidak bisa digunakan. Salah satu cara yang mudah adalah dengan integrasi analitis dengan $c_p = f(t)$ didekati dengan persamaan polinomial.

$$c_p = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 + \dots + a_n \cdot T^n = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot T^i) \quad (5.41)$$

Selanjutnya harga Q dapat dihitung secara analitis sebagai berikut:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \sum_{i=0}^n (a_i \cdot T^i) dT = \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+i} a_i \cdot T^{i+1} \Big|_{T_1}^{T_2} = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{1+i} (T_2^{i+1} - T_1^{i+1}) \quad (5.42)$$

Program komputer untuk pelaksanaan hitungan terdiri dari regresi polinomial order n (lihat bab 4.6) dan perhitungan Q dengan persamaan (5.42) seperti berikut:

```

function Latihan_54
clc
clear all
T_data =input('Suhu (K)          = ');
Cp_data =input('Kapasitas panas (kal/gmol.K) = ');
N      =input('Orde polinomial      = ');
xa     =input('Batas bawah integrasi   = ');
xb     =input('Batas atas integrasi    = ');

jum_Tdata=length(T_data);
jum_Cpdata=length(Cp_data);
if jum_Tdata~=jum_Cpdata
    disp('Banyaknya data tidak sama !!!');
else
    B=zeros((N+1),1);
    A=zeros((N+1),(N+1));
    for k=1:(N+1)
        for i=1:jum_Tdata
            B(k)=B(k)+Cp_data(i)*T_data(i).^(k-1);
        end
        for l=1:(N+1)
            for i=1:jum_Tdata
                A(k,l)=A(k,l)+T_data(i).^(k+l-2);
            end
        end
    end
    for p=1:N
        maxrow=p;
        for i=(p+1):(N+1)
            if abs(A(i,p))>=abs(A(p,p))
                maxrow=i;
            end
        end
        for i=p:(N+1)
            Asimp=A(p,i);
            A(p,i)=A(maxrow,i);
            A(maxrow,i)=Asimp;
        end
        Bsimp=B(p);
        B(p)=B(maxrow);
        B(maxrow)=Bsimp;
    end
end

```

```

    for k=(p+1):(N+1)
        rasio=A(k,p)/A(p,p);
        for m=p:(N+1)
            A(k,m)=A(k,m)-rasio*A(p,m);
        end
        B(k)=B(k)-rasio*B(p);
    end
end
C(N+1)=B(N+1)/A((N+1),(N+1));
for i=N:-1:1
    jc=0;
    for j=1:N
        jc=jc+A(i,(j+1))*C(j+1);
    end
    C(i)=(B(i)-jc)/A(i,i);
end
disp('Koefisien Polinomial');
disp('-----');
for i=1:(N+1)
    fprintf('A(%1.0f) = %s \n',(i-1),C(i));
end
end
disp('-----');
disp(' Suhu (K)    CP_data    CP_hitung ');
disp('-----');
for i=1:jum_Tdata
    T=T_data(i);
    CP_hitung=hitung_CP(N,C,T);
    ralat(i)=abs(Cp_data(i)-CP_hitung)/Cp_data(i);
    fprintf(' %3.0f    %3.3f    %3.3f \n',T_data(i),Cp_data(i),CP_hitung);
end
disp('-----');
totalat=sum(ralat)*100/jum_Tdata;
disp(['Ralat rata-rata = ' num2str(totalat) ' %']);
disp('-----');
for k=1:(N+1)
    Qhit(k)=C(k)*(xb.^k-xa.^k)/k;
end
Qhitung=sum(Qhit);
disp(['Panas yang diperlukan (Q) = ' num2str(Qhitung) ' cal/gmol']);
end

```

```

function CP_hit=hitung_CP(N,C,T)
CP_hit=C(1);
for k=2:(N+1)
    CP_hit=CP_hit+C(k)*T.^(k-1);
end
end

```

Hasil keluaran program tersebut adalah:

Koefisien Polinomial

 $A(0) = 1.901516e+01$

$A(1) = 5.334994e-02$

$A(2) = 9.923122e-06$

$A(3) = -1.021358e-08$

Suhu (K)	CP_data	CP_hitung
400	41.290	41.289
475	45.500	45.501
520	48.000	48.004
580	51.310	51.303
660	55.610	55.612
750	60.300	60.301
850	65.260	65.260

400 41.290 41.289

475 45.500 45.501

520 48.000 48.004

580 51.310 51.303

660 55.610 55.612

750 60.300 60.301

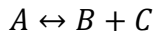
850 65.260 65.260

Ralat rata-rata = 0.0043604 %

Panas yang diperlukan (Q) = 15942.5226 cal/gmol

5. Reaktor Tabung Non-Adibatis Non Isotermis (Penyelesaian PD Ordiner Simultan dengan Cara Runge-Kutta dan *Predictor-Corrector*)

Reaksi fasa gas bolak-balik, eksotermis:



dijalankan dalam sebuah reaktor tabung *plug flow* berdiameter D dan panjang L . Kecepatan reaksi dapat didekati dengan persamaan

$$r_A = k \cdot \left(C_A - \frac{C_B \cdot C_C}{K} \right) \quad (5.43)$$

dengan

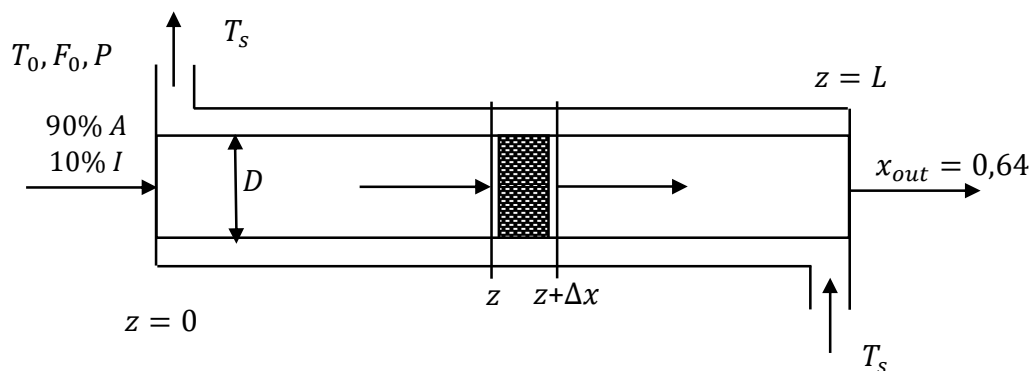
$$k = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{R \cdot T}\right) \quad (5.44)$$

$$K = \exp\left(\alpha + \frac{\beta}{T}\right) \quad (5.45)$$

Perubahan entalpi reaksi mengikuti persamaan

$$\Delta H_R = \Delta H_R^0 + (C_{pB} + C_{pC} - C_{pA})(T - T_{ref}) \quad (5.46)$$

dengan ΔH_R^0 adalah perubahan entalpi reaksi pada suhu T_{ref} . Umpan reaktor berjumlah F_0 (gmol/detik) bersuhu T_0 , dengan komposisi 90% A dan 10% inert (I). Tekanan sepanjang reaktor dianggap tetap P . Untuk menjaga agar suhu reaktor tidak terlalu tinggi, pendingin berupa cairan jenuh bersuhu T_s dialirkan di luar tabung (dalam annulus). Pendingin meninggalkan annulus dalam keadaan uap jenuh pada suhu T_s (sehingga suhu pendingin tetap). Koefisien perpindahan panas antara gas-gas dan pendingin dihitung berdasarkan luas permukaan dalam tabung = U . Kapasitas panas gas-gas dianggap tetap. Ingin dicari konversi A (x) dan suhu gas (T) pada berbagai posisi (z), pada keadaan *steady*.



Gambar 5.5. Reaktor tabung *plug-flow*, non-adiabatis, non-isotermis

Neraca massa A pada elemen volum:

Rate of Input – Rate of Output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

$$F_A|_z - F_A|_{z+\Delta z} - \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \Delta z \cdot \bar{r}_A = 0 \quad (5.47)$$

$$\frac{F_A|_{z+\Delta z} - F_A|_z}{\Delta z} = -\frac{\pi}{4} D^2 \bar{r}_A \quad (5.48)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{dF_A}{dz} = -\frac{\pi}{4} D^2 r_A \quad (5.49)$$

$$\frac{dF_A}{dz} = -\frac{\pi}{4} D^2 k \cdot \left(C_A - \frac{C_B \cdot C_C}{K} \right) \quad (5.50)$$

Karena diinginkan jawaban dalam x, T, z , maka F_A, C_A, C_B , dan C_C perlu dieliminasi.

Stoikhiometri:

Konversi	A	B	C	I	Total
$x = 0$	$0,9 F_0$	0	0	$0,1 F_0$	F_0
$x = x$	$0,9 F_0(1 - x)$	$0,9 F_0 x$	$0,9 F_0 x$	$0,1 F_0$	$F_0(1 + 0,9x)$

Dari tabel dapat dilihat bahwa:

$$F_A = 0,9 F_0(1 - x) \quad (5.51)$$

sehingga:

$$dF_A = -0,9 F_0 dx \quad (5.52)$$

Jika dianggap gas mengikuti sifat gas ideal, maka berlaku persamaan:

$$P_A V = n_A R T \quad (5.53)$$

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{RT} = y_A \frac{P}{RT} = \left(\frac{0,9(1-x)}{1+0,9x} \right) \frac{P}{RT} \quad (5.54)$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$C_B = y_B \frac{P}{RT} = \left(\frac{0,9x}{1+0,9x} \right) \frac{P}{RT} \quad (5.55)$$

$$C_C = y_C \frac{P}{RT} = \left(\frac{0,9x}{1+0,9x} \right) \frac{P}{RT} \quad (5.56)$$

$$-0,9 F_0 \frac{dx}{dz} = -\frac{\pi}{4} D^2 k \cdot \left(\left(\frac{0,9(1-x)}{1+0,9x} \right) \frac{P}{RT} - \left(\frac{0,9x}{1+0,9x} \right)^2 \frac{P^2}{R^2 \cdot T^2} \frac{1}{K} \right) \quad (5.57)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pi \cdot D^2 P}{3,6 \cdot F_0 \cdot R} \cdot \frac{k}{T} \left(\left(\frac{0,9(1-x)}{1+0,9x} \right) - \left(\frac{0,9x}{1+0,9x} \right)^2 \frac{P}{R \cdot T} \frac{1}{K} \right) \quad (5.58)$$

Neraca panas pada elemen volum:

(referensi: entalpi semua unsur stabil pada T_{ref} adalah nol)

$$(\sum(F_i H_{fi}))|_z - (\sum(F_i H_{fi}))|_{z+\Delta z} + U \cdot \pi \cdot D \cdot \Delta z \cdot (\bar{T} - T_s) = 0 \quad (5.59)$$

$$\frac{\sum(F_i H_{fi})|_{z+\Delta z} - \sum(F_i H_{fi})|_z}{\Delta z} = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (\bar{T} - T_s) \quad (5.60)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{d}{dz} (\sum(F_i H_{fi})) = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.61)$$

$$\sum \left(F_i \frac{dH_{fi}}{dz} \right) + \sum \left(H_{fi} \frac{dF_i}{dz} \right) = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.62)$$

$$\sum \left(F_i \cdot C_{pi} \cdot \frac{dT}{dz} \right) + \left(H_{fA} \cdot \frac{dF_A}{dz} + H_{fB} \cdot \frac{dF_B}{dz} + H_{fC} \cdot \frac{dF_C}{dz} + H_{fI} \cdot \frac{dF_I}{dz} \right) = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \sum \left(F_i C_{pi} \frac{dT}{dz} \right) + \left(-H_{fA} \cdot 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} + H_{fB} \cdot 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} + H_{fC} \cdot 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} \right) \\ = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \end{aligned} \quad (5.64)$$

($\frac{dF_i}{dz}$ dicari dari persamaan stoikiometri; $\frac{dF_I}{dz} = 0$ karena inert tidak mengalami perubahan jumlah mol).

$$\sum \left(F_i C_{pi} \frac{dT}{dz} \right) + (H_{fB} + H_{fC} - H_{fA}) 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.65)$$

$$\sum \left(F_i C_{pi} \frac{dT}{dz} \right) + (\Delta H_R) 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.66)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9 F_0 (-\Delta H_R) \frac{dx}{dz} - U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s)}{0,9 F_0 (1-x) C_{pA} + 0,9x(C_{pB} + C_{pC}) + 0,1C_{pI}} \quad (5.67)$$

Ringkasan persamaan-persamaan pada kasus ini adalah:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pi \cdot D^2 P}{3,6 \cdot F_0 \cdot R} \cdot \frac{k}{T} \left(\left(\frac{0,9(1-x)}{1+0,9x} \right) - \left(\frac{0,9x}{1+0,9x} \right)^2 \frac{P}{R \cdot T} \frac{1}{K} \right) \quad (5.58)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9 F_0 (-\Delta H_R) \frac{dx}{dz} - U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s)}{0,9 F_0 (1-x) C_{pA} + 0,9x(C_{pB} + C_{pC}) + 0,1C_{pI}} \quad (5.67)$$

$$k = A \cdot \exp \left(-\frac{E}{R \cdot T} \right) \quad (5.44)$$

$$K = \exp \left(\alpha + \frac{\beta}{T} \right) \quad (5.45)$$

$$\Delta H_R = \Delta H_R^0 + (C_{pB} + C_{pC} - C_{pA})(T - T_{ref}) \quad (5.46)$$

Keadaan batas:

$$z = 0; x = 0; T = T_0$$

Perhitungan 3 titik pertama menggunakan cara *Runge-Kutta (one-step method)* sedangkan untuk titik-titik berikutnya dipakai cara *predictor-corrector (multi-step method)*.

Contoh program dalam MATLAB untuk data-data $U = 0,0085 \left(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{detik} \cdot \text{K}} \right)$; $F_0 = 10 \left(\frac{\text{gmol}}{\text{detik}} \right)$; $x_0 = 0$; $P = 7 \text{ atm}$; $D = 35 \text{ cm}$; $L = 1000 \text{ cm}$; C_{pA} , C_{pB} , C_{pC} dan C_{pI} masing-masing 20, 10, 15 dan $10 \frac{\text{cal}}{\text{gmol} \cdot \text{K}}$; $\Delta H_R^0 = -35000 \frac{\text{cal}}{\text{gmol}}$; $R = 82 \left(\frac{\text{cm}^3 \text{ atm}}{\text{gmol} \cdot \text{K}} \right)$; $A = 10000 \text{ detik}^{-1}$; $\frac{E}{R} = 6500 \text{ K}$; $\alpha = -12,3$; $\beta = 4400 \text{ K}$; $T_{ref} = 273 \text{ K}$; $T_0 = 470 \text{ K}$; $T_s = 421 \text{ K}$; adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_55a
clc
clear all
data1=[10,7,35,0.0085,1000,20,10,15,10,-35000];
data2=[82,10000,6500,-12.3,4400,273,421];
data3=[100,0,1000,0,470];
Z=[data3(2):data3(1):data3(3)];
X(1)=data3(4);
T(1)=data3(5);
var=[Z(1),X(1),T(1)];
n=(data3(3)-data3(2))/data3(1);
delZ=data3(1);

disp('-----');
disp('          D a t a          ');
disp('-----');
disp(['Laju umpan reaktor          = ' num2str(data1(1)) ' gmol/detik']);
disp(['Tekanan                      = ' num2str(data1(2)) ' atm']);
disp(['Diameter dalam tabung        = ' num2str(data1(3)) ' cm']);
disp(['Panjang reaktor               = ' num2str(data1(5)) ' cm']);
disp(['Koefisien perpindahan panas overall = ' num2str(data1(4)) ' cal/cm^2.det.K']);
disp(['Kapasitas panas A              = ' num2str(data1(6)) ' cal/gmol.K']);
disp(['Kapasitas panas B              = ' num2str(data1(7)) ' cal/gmol.K']);
disp(['Kapasitas panas C              = ' num2str(data1(8)) ' cal/gmol.K']);
```

```

disp(['Kapasitas panas Inert      = ' num2str(data1(9)) ' cal/gmol.K']);
disp(['Entalpi reaksi pada suhu referensi = ' num2str(data1(10)) ' cal/gmol']);
disp(['Konstanta gas umum          = ' num2str(data2(1)) ' cm^3.atm/gmol.K']);
disp(['Faktor frekwensi tumbukan    = ' num2str(data2(2)) ' 1/detik']);
disp(['Energi aktivasi, E/R        = ' num2str(data2(3)) ' K']);
disp(['Harga alfa pd konst. kesetimbangan = ' num2str(data2(4))]);
disp(['Harga beta pd konst. kesetimbangan = ' num2str(data2(5))]);
disp(['Suhu pendingin              = ' num2str(data2(7)) ' K']);
disp(['Suhu referensi              = ' num2str(data2(6)) ' K']);
disp(' ');
disp('Kondisi Umpan Masuk:');
disp('-----');
disp(['Konversi umpan masuk = ' num2str(data3(4))]);
disp(['Suhu umpan masuk     = ' num2str(data3(5)) ' K']);
disp(' ');
disp('Distribusi suhu dan konversi sepanjang reaktor');
disp('-----');

disp(' jarak, cm   Konversi   Suhu, K ');
disp('-----');
fprintf(' %4.0f      %1.6f   %4.4f \n',var(1),var(2),var(3));

dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
fX(1)=dfdx(1);
fT(1)=dfdx(2);

for i=1:n
    if i<=3
        var=[Z(i),X(i),T(i)];
        dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
        k1=delZ*dfdx(1);
        l1=delZ*dfdx(2);
        var=[(Z(i)+delZ/2) (X(i)+k1/2) (T(i)+l1/2)];
        dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
        k2=delZ*dfdx(1);
        l2=delZ*dfdx(2);
        var=[(Z(i)+delZ/2) (X(i)+k2/2) (T(i)+l2/2)];
        dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
        k3=delZ*dfdx(1);
    end
end

```

```

l3=delZ*dfdx(2);
var=[(Z(i)+delZ) (X(i)+k3) (T(i)+l3)];
dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
k4=delZ*dfdx(1);
l4=delZ*dfdx(2);
X(i+1)=X(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)./6;
T(i+1)=T(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)./6;
var=[Z(i+1) X(i+1) T(i+1)];
dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
fX(i+1)=dfdx(1);
fT(i+1)=dfdx(2);
else
X(i+1)=X(i)+delZ*(55*fX(i)-59*fX(i-1)+37*fX(i-2)-9*fX(i-3))/24;
T(i+1)=T(i)+delZ*(55*fT(i)-59*fT(i-1)+37*fT(i-2)-9*fT(i-3))/24;
var=[Z(i+1) X(i+1) T(i+1)];
dfdx=f_Latihan_55(var,data1,data2);
fX(i+1)=dfdx(1);
fT(i+1)=dfdx(2);
X(i+1)=X(i)+delZ*(9*fX(i+1)+19*fX(i)-5*fX(i-1)+fX(i-2))/24;
T(i+1)=T(i)+delZ*(9*fT(i+1)+19*fT(i)-5*fT(i-1)+fT(i-2))/24;
end
fprintf(' %4.0f      %1.6f   %4.4f \n',Z(i+1),X(i+1),T(i+1));
end
disp('-----');
end

function dXdT=f_Latihan_55(var,data1,data2)
Z=var(1);
X=var(2);
T=var(3);
F0=data1(1);
PT=data1(2);
DIA=data1(3);
U=data1(4);
%L=data1(5);
CPA=data1(6);
CPB=data1(7);
CPC=data1(8);
CPI=data1(9);
DHR0=data1(10);

```

```

R=data2(1);
AR=data2(2);
EPERR=data2(3);
ALFA=data2(4);
BETA=data2(5);
TREF=data2(6);
TS=data2(7);
DHR=DHR0+(CPB+CPC-CPA)*(T-TREF);
K=exp(ALFA+BETA/T);
k=AR*exp(-EPERR/T);

dXdz=(pi*DIA.^2*PT/(3.6*F0*R))*(k/T)*( (0.9*(1-X)/(1+0.9*X))-
(0.9*X/(1+0.9*X)).^2*PT/(R*T*K));
dTdz1=0.9*F0*(-DHR)*dXdz-U*pi*DIA*(T-TS);
dTdz2=F0*(0.9*(1-X)*CPA+0.9*X*(CPB+CPC)+0.1*CPI);
dTdz=dTd1/dTd2;

dXdT=[dXdz;dTd];
end

```

Keluaran program tersebut adalah sebagai berikut:

----- D a t a -----

Laju umpan reaktor	= 10 gmol/detik
Tekanan	= 7 atm
Diameter dalam tabung	= 35 cm
Panjang reaktor	= 1000 cm
Koefisien perpindahan panas overall	= 0.0085 cal/cm^2.det.K
Kapasitas panas A	= 20 cal/gmol.K
Kapasitas panas B	= 10 cal/gmol.K
Kapasitas panas C	= 15 cal/gmol.K
Kapasitas panas Inert	= 10 cal/gmol.K
Entalpi reaksi pada suhu referensi	= -35000 cal/gmol

Konstanta gas umum = 82 cm³.atm/gmol.K
 Faktor frekwensi tumbukan = 10000 1/detik
 Energi aktivasi, E/R = 6500 K
 Harga alfa pd konst. kesetimbangan = -12.3
 Harga beta pd konst. kesetimbangan = 4400
 Suhu pendingin = 421 K
 Suhu referensi = 273 K

Kondisi Umpan Masuk:

Konversi umpan masuk = 0
 Suhu umpan masuk = 470 K

Distribusi suhu dan konversi sepanjang reaktor

jarak, cm	Konversi	Suhu, K
0	0.000000	470.0000
100	0.017809	473.6734
200	0.036800	477.3992
300	0.057003	481.1918
400	0.078447	485.0578
500	0.101154	488.9919
600	0.125127	492.9681
700	0.150333	496.9245
800	0.176673	500.7383
900	0.203926	504.1850
1000	0.231670	506.8837

Catatan

Diambil:

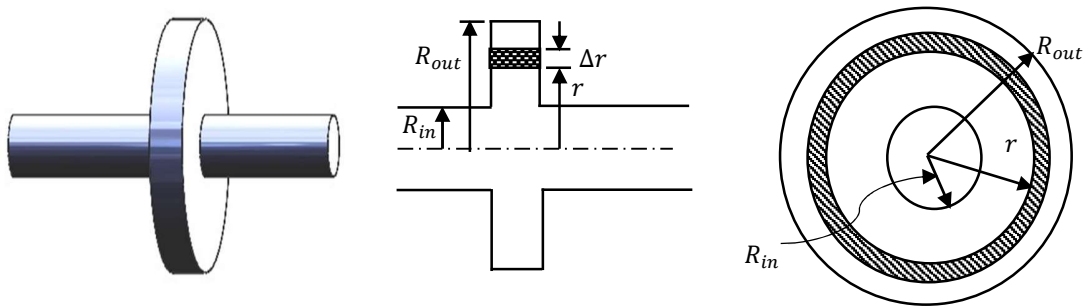
Jumlah interval untuk perhitungan (NINT)=100

Jumlah interval sampai mencetak hasil (NPRINT)=10

(tidak semua hasil hitungan dicetak, tetapi hanya setiap 10 interval)

6. Distribusi Suhu pada *Circular Fin* (*Finite Difference Approximation* untuk Penyelesaian PD Ordiner)

Suatu *circular fin* berjari-jari R_{out} , tebal b , melekat pada pipa berjari-jari R_{in} (Gambar 5.6). Suhu permukaan luar pipa T_s , sedangkan suhu udara T_u . Konduktivitas panas bahan fin k , koefisien perpindahan panas antara permukaan fin dan udara h . Karena fin cukup tipis, gradien suhu dalam fin ke arah aksial diabaikan. Ingin dicari distribusi suhu fin dalam keadaan *steady* ($T = f(r)$).



Gambar 5.6. *Circular fin* dan elemen volumenya

Neraca panas pada elemen volum setebal Δr pada fin:

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-k \cdot 2\pi r \cdot b \frac{dT}{dr}\right)_r - \left(-k \cdot 2\pi(r + \Delta r) \cdot b \frac{dT}{dr}\right)_{r+\Delta r} + h \cdot 2\pi \bar{r} \cdot \Delta r \cdot 2 (\bar{T} - T_u) = 0 \quad (5.68)$$

$$\frac{(r+\Delta r) \frac{dT}{dr} \Big|_{r+\Delta r} - r \frac{dT}{dr} \Big|_r}{\Delta r} - \frac{2 \cdot h \cdot \bar{r}}{k \cdot b} (\bar{T} - T_u) = 0 \quad (5.69)$$

Jika diambil $\Delta r \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2 \cdot h \cdot r}{k \cdot b} (T - T_u) = 0 \quad (5.70)$$

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} - \frac{2 \cdot h \cdot r}{k \cdot b} (T - T_u) = 0 \quad (5.71)$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2 \cdot h}{k \cdot b} (T - T_u) = 0 \quad (5.72)$$

Finite difference approximation:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(R_{in} + i \cdot \Delta r)} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2 \cdot \Delta r} - \frac{2 \cdot h}{k \cdot b} (T_i - T_u) = 0 \quad (5.73)$$

$$2T_{i-1} - 4T_i + 2T_{i+1} + \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + i\right)} (T_{i+1} - T_{i-1}) - \frac{4 \cdot h \cdot (\Delta r)^2}{k \cdot b} (T_i - T_u) = 0 \quad (5.74)$$

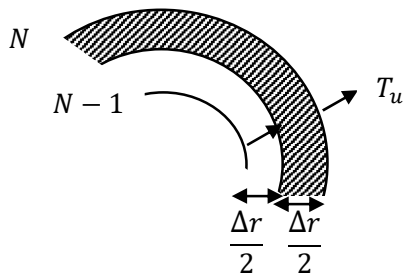
$$\left(2 - \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + i\right)}\right) T_{i-1} + \left(-4 - \frac{4 \cdot h \cdot (\Delta r)^2}{k \cdot b}\right) T_i + \left(2 + \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + i\right)}\right) T_{i+1} = -\frac{4 \cdot h \cdot (\Delta r)^2}{k \cdot b} T_u \quad (5.75)$$

Persamaan (5.75) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ (N =jumlah interval).

Khusus untuk $i = 1$, karena $T_0 = T_s$, maka persamaan (5.75) berubah menjadi:

$$\left(-4 - \frac{4h(\Delta r)^2}{k.b}\right)T_1 + \left(2 + \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + 1\right)}\right)T_2 = -\frac{4h(\Delta r)^2}{k.b}T_u - \left(2 - \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + 1\right)}\right)T_s \quad (5.76)$$

Persamaan untuk $i = N$ (permukaan lengkung fin) dapat dicari dengan cara berikut (salah satu cara pendekatan).



Neraca panas pada elemen volum setebal $\frac{\Delta r}{2}$ pada permukaan lengkung fin:

Rate of Input – Rate of Output

= Rate of Accumulation

$$\begin{aligned} & \left(-k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(R_{out} - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot b \cdot \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta r}\right) - \\ & \left(h \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{out} \cdot b \cdot (T_N - T_u) + h \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(R_{out} - \frac{\Delta r}{4}\right) \cdot \frac{\Delta r}{2} \cdot 2 \cdot (T_N - T_u)\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Gambar. 5.7. Finite difference approximation sekitar $i = N$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{2}\right)T_{N-1} + \left(-\frac{R_{out}}{\Delta r} + \frac{1}{2} - \left(\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{4}\right)\frac{h(\Delta r)^2}{k.b} - \frac{h.R_{out}}{k}\right)T_N \\ & = \left(-\left(\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{4}\right)\frac{h(\Delta r)^2}{k.b} - \frac{h.R_{out}}{k}\right)T_u \end{aligned} \quad (5.78)$$

Persamaan-persamaan (5.75), (5.76) dan (5.78) membentuk N persamaan linier dengan N bilangan tak diketahui ($T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$) berbentuk matriks tridiagonal yang bisa diselesaikan dengan cara seperti bab 4.6 sehingga diperoleh harga-harga $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$.

Setelah distribusi suhu dapat dicari, selanjutnya dapat dihitung panas terbuang ke udara melalui fin sebagai berikut (silahkan dijabarkan sendiri).

$$q = 4 \cdot \pi \cdot h \int_{R_{in}}^{R_{out}} r(T - T_u)dr + 2 \cdot \pi \cdot h \cdot b \cdot R_{out}(T_N - T_u) \quad (5.79)$$

Harga q dapat dihitung dengan integrasi numeris cara Simpson. Jika fin ideal ($k = \infty$) maka suhu di semua bagian dari fin akan seragam $= T_s$ sehingga panas terbuang ke udara pada fin ideal:

$$q_{ideal} = (2 \cdot \pi \cdot (R_{out}^2 - R_{in}^2) + 2 \cdot \pi \cdot R_{out} \cdot b)h \cdot (T_s - T_u) \quad (5.80)$$

Karena fin berfungsi untuk membuang panas ke udara, maka efisiensi fin adalah:

$$\eta = \frac{q}{q_{ideal}} \times 100\% \quad (5.81)$$

Program komputer untuk pelaksanaan perhitungan distribusi suhu dan efisiensi fin adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_56
clc
clear all
k =input('Konduktivitas panas (kal/det.cm.C)      = ');
h =input('Koefisien perpindahan panas fin-udara (kal/det.cm^2.C) = ');
rin =input('Jari-jari dalam fin (cm)              = ');
rout =input('Jari-jari luar fin (cm)               = ');
b =input('Tebal fin (cm)                          = ');
N =input('Banyaknya interval perhitungan         = ');
Ts =input('Suhu permukaan luar pipa (C)           = ');
Tu =input('Suhu udara (C)                        = ');

data=[k; h; rin; rout; b; N; Ts; Tu];
dR=(rout-rin)/N;
R=[rin:dR:rout];
T=hitung_suhu(data,dR);
f_hit=R.*(T-Tu);
hitung=hitung_Q(N,f_hit,dR);

Q_actual=4*pi*h*hitung+2*pi*h*b*rout*(T(N+1)-Tu);
Q_ideal=(2*pi*(rout.^2-rin.^2)+2*pi*rout*b)*h*(Ts-Tu);
efisiensi=Q_actual/Q_ideal*100;
disp('-----');
disp('    R        T    ');
disp('-----');
for i=1:(N+1)
    fprintf('    %2.3f    %4.4f \n',R(i),T(i));
end
disp('-----');
disp(['Q actual = ' num2str(Q_actual) ' kal/det']);
disp(['Q ideal = ' num2str(Q_ideal) ' kal/det']);
disp(['Efisiensi = ' num2str(efisiensi) ' %']);
end
```



```

function T_hit=hitung_suhu(data,dR)
k = data(1);
h = data(2);
rin = data(3);
rout = data(4);
b = data(5);
N = data(6);
Ts = data(7);
Tu = data(8);
T(1)=Ts;
A(2)=0;
B(2)=-4-4*h*dR.^2/(k*b);
C(2)=2+1/(rin/dR+1);
D(2)=-4*h*dR.^2*Tu/(k*b)-(2-1/(rin/dR+1))*Ts;
for i=3:N
    A(i)=2-1/(rin/dR+i);
    B(i)=-4-4*h*dR.^2/(k*b);
    C(i)=2+1/(rin/dR+i);
    D(i)=-4*h*dR.^2*Tu/(k*b);
end
A(N+1)=rout/dR-0.5;
B(N+1)=-rout/dR+0.5-(rout/dR-0.25)*h*dR.^2/(k*b)-h*rout/k;
C(N+1)=0;
D(N+1)=(-(rout/dR-0.25)*h*dR.^2/(k*b)-h*rout/k)*Tu;

for i=3:N+1
    rasio=A(i)/B(i-1);
    A(i)=A(i)-rasio*B(i-1);
    B(i)=B(i)-rasio*C(i-1);
    D(i)=D(i)-rasio*D(i-1);
end
T(N+1)=D(N+1)/B(N+1);
for i=N:-1:2
    T(i)=(D(i)-C(i)*T(i+1))/B(i);
end
T_hit=T;
end

function Q_hit=hitung_Q(N,f_hit,dR)
Q_hit=dR*(f_hit(1)+4*sum(f_hit(2:2:N))+2*sum(f_hit(3:2:N-1))+f_hit(N+1))/3;
end

```

Keluaran program adalah:

Konduktivitas panas (kal/det.cm.C)	= 0.5
Koefisien perpindahan panas fin-udara (kal/det.cm ² .C)	= 0.0007
Jari-jari dalam fin (cm)	= 3
Jari-jari luar fin (cm)	= 8
Tebal fin (cm)	= 0.2
Banyaknya interval perhitungan	= 20
Suhu permukaan luar pipa (C)	= 400
Suhu udara (C)	= 30

R	T
3.000	400.0000
3.250	390.5795
3.500	382.1606
3.750	374.5831
4.000	367.7572
4.250	361.6084
4.500	356.0743
4.750	351.1020
5.000	346.6464
5.250	342.6686
5.500	339.1352
5.750	336.0168
6.000	333.2880
6.250	330.9264
6.500	328.9123
6.750	327.2281
7.000	325.8586
7.250	324.7900
7.500	324.0102
7.750	323.5083
8.000	323.2747

Q actual	= 77.2717 kal/det
Q ideal	= 92.1077 kal/det
Efisiensi	= 83.8927 %

7. Pengeringan Silinder (*Finite Difference Approximation* untuk Penyelesaian PD Parsial)

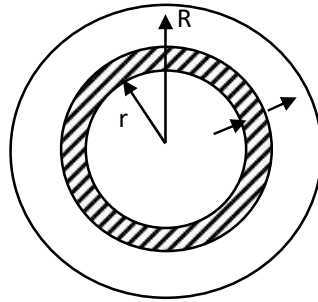
Suatu padatan berbentuk silinder panjang, jari-jari R , dengan kadar air mula-mula C_{in} ($\frac{g}{cm^3}$) dikeringkan dengan udara yang mengandung uap air sebesar y_{ud} ($\frac{g \text{ air}}{g \text{ udara}}$). Kestimbangan H_2O di fasa padat dan di udara dapat didekati dengan hukum yang mirip Henry berbentuk:

$$y^* = H \cdot C \quad (5.82)$$

Kecepatan perpindahan massa uap air dari permukaan padatan ke udara mengikuti persamaan:

$$N_A \left(\frac{g \cdot H_2O}{jam \cdot cm^2} \right) = K_G (y^* - y_{ud}) \quad (5.83)$$

Dengan y^* adalah kadar H_2O di udara yang setimbang dengan kadar H_2O pada permukaan silinder. Karena kadar air dalam silinder sudah cukup rendah maka kecepatan difusi H_2O dari dalam silinder ke permukaan berpengaruh dan karena silinder sangat panjang ($R \ll L$), maka difusi H_2O dianggap hanya ke arah radial. Ingin dicari kadar air dalam silinder (C) pada berbagai posisi (r) dan waktu (t), serta persen air tersisa dalam silinder pada berbagai waktu.



Gambar 5.8. Elemen volum pada silinder setebal Δr

Neraca massa H_2O pada elemen volum dalam silinder setebal Δr (Gambar 5.8) :

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-D_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_r \right) - \left(-D_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r + \Delta r) \cdot L \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} \right) = 2 \cdot \pi \cdot \bar{r} \cdot \Delta r \cdot L \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \quad (5.84)$$

$$\frac{(r+\Delta r) \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r+\Delta r} - r \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_r}{\Delta r} = \frac{1}{D_e} \bar{r} \frac{\partial C}{\partial t} \quad (5.85)$$

Jika diambil $\Delta r \rightarrow 0$ maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) = \frac{1}{D_e} r \frac{\partial C}{\partial t} \quad (5.86)$$

$$r \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{D_e} r \frac{\partial C}{\partial t} \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{D_e} \frac{\partial C}{\partial t} \quad (5.88)$$

Finite difference approximation, menggunakan cara implisit:

$$\frac{C_{i-1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i+1,j+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i \Delta r} \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1}}{2 \Delta r} = \frac{1}{D_e} \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta t} \quad (5.89)$$

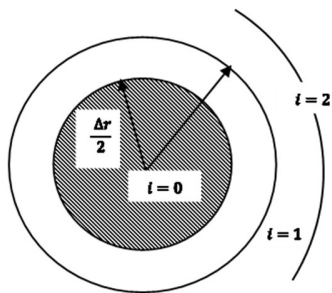
$$C_{i-1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i+1,j+1} + \frac{1}{2i} (C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1}) = \frac{(\Delta r)^2}{D_e \Delta t} (C_{i,j+1} - C_{i,j}) \quad (5.90)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right) C_{i-1,j+1} + (-2 - M) C_{i,j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) C_{i+1,j+1} = -M C_{i,j} \quad (5.91)$$

dengan $M = \frac{(\Delta r)^2}{D_e \Delta t}$ = modulus. (5.92)

Persamaan (5.91) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ (N =jumlah interval).

Persamaan untuk $i = 0$ diperoleh dengan menyusun neraca massa H_2O pada elemen di sumbu silinder berjari-jari $\frac{\Delta r}{2}$ (Gambar 5.9).



Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

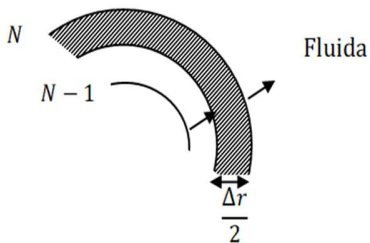
$$0 - \left(-D_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta r}{2} \cdot L \frac{C_{1,j+1} - C_{0,j+1}}{\Delta r} \right) = \pi \cdot \left(\frac{\Delta r}{2} \right)^2 \cdot L \frac{C_{0,j+1} - C_{0,j}}{\Delta t} \quad (5.93)$$

Penyederhanaan persamaan (5.93) menghasilkan

$$(M + 4) C_{0,j+1} - 4 C_{1,j+1} = M C_{0,j} \quad (5.94)$$

Gambar 5.9. *Finite difference approximation sekitar $i = 0$*

Persamaan untuk $i = N$ dapat diperoleh dengan menyusun neraca massa H_2O pada elemen volum setebal $\frac{\Delta r}{2}$ pada permukaan (Gambar 5.10).



Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\begin{aligned} & \left(-D_e 2\pi \left(R - \frac{\Delta r}{2} \right) L \frac{C_{N,j+1} - C_{N-1,j+1}}{\Delta r} \right) - (K_G 2\pi R L (y^* - y_{ud})) \\ & = 2\pi \left(R - \frac{\Delta r}{4} \right) \frac{\Delta r}{2} L \frac{C_{N,j+1} - C_{N,j}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Dalam hal ini

$$y^* = H \cdot C_{N,j+1}$$

Gambar 5.9. *Finite difference approximation sekitar $i = 0$*

Penyederhanaan persamaan (5.95) menghasilkan:

$$2 \left(N - \frac{1}{2} \right) C_{N-1,j+1} + \left(-M \left(N - \frac{1}{4} \right) - 2 \left(N - \frac{1}{2} \right) - 2 \frac{K_G R H}{D_e} \right) C_{N,j+1} \\ = -M \left(N - \frac{1}{4} \right) C_{N,j} - 2 \frac{K_G R}{D_e} y_{ud} \quad (5.96)$$

Berdasar persamaan-persamaan (5.91), (5.94), dan (5.96), jika harga-harga C pada indeks waktu j diketahui maka dapat dihitung harga-harga C pada indeks waktu $j + 1$ (terbentuk persamaan matriks tridiagonal). Karena harga-harga C pada $j = 0$ tersedia ($= C_{in}$) maka harga-harga C pada $j = 1$ dapat dihitung. Selanjutnya berdasar harga-harga C pada $j = 1$ dapat dihitung harga-harga C pada $j = 2$. Demikian seterusnya.

Persen air tersisa dalam silinder dapat dihitung sebagai berikut:

$$\text{Air dalam silinder} = 2 \cdot \pi \cdot L \int_{r=0}^{r=R} r \cdot C \cdot dr \text{ (silahkan dijabarkan sendiri)} \quad (5.97)$$

$$\text{Air dalam silinder mula-mula} = \pi \cdot R^2 L C_{in} \quad (5.98)$$

$$\% \text{ air tersisa} = \frac{\text{air dalam bola}}{\text{air dalam bola mula-mula}} \cdot 100\% = \frac{2}{R^2 C_{in}} \int_{r=0}^{r=R} r \cdot C \cdot dr \cdot 100\% \quad (5.99)$$

Setelah harga-harga C dihitung, maka % air tersisa dapat dihitung dengan melakukan integrasi persamaan (5.99) secara numeris (misalnya dengan cara Simpson).

Program komputer untuk pelaksanaan perhitungan dengan data-data: $D_e = 0,04 \frac{\text{cm}^2}{\text{jam}}$; $K_G = 0,08 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2 \cdot \text{jam}}$; $H = 0,2$; $R = 2 \text{ cm}$; $C_{in} = 0,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $y_{ud} = 0,002 \frac{\text{g } H_2O}{\text{g udara}}$, adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_57
clc
clear all
DE = input('Difusifitas efektif (cm2/jam)      = ');
AKG = input('Koefisien perpindahan massa (g/cm2/jam)      = ');
H = input('Tetapan kesetimbangan Henry      = ');
RSIL = input('Jari-jari selinder (cm)      = ');
CIN = input('Kadar air dalam padatan mula-mula (g/cm3)      = ');
YUD = input('Kadar uap air di udara (g/g-udara)      = ');
NPANJ = input('Jumlah interval panjang      = ');
```

```

NTIME = input('Jumlah interval waktu          = ');
NPRINT = input('Jumlah interval waktu sampai cetak          = ');
AM = input('Modulus                                = ');

delr=RSIL/NPANJ;
R=[0:delr:RSIL];
delt=delr.^2/(AM*DE);
%IPRINT=NPRINT;
CAIR=CIN*ones(1,(NPANJ+1));
iterasi1=0;
itime=0;
while iterasi1==0
    time=itime*delt;
    disp(['Waktu = ' num2str(time)]);
    disp('-----');
    disp('  Jari-jari, cm      Kadar air, g/cm3  ');
    disp('-----');
    for i=1:(NPANJ+1)
        fprintf('    %1.3f          %1.7f\n',R(i),CAIR(i));
    end
    disp('-----');
    CAIRSISA=hitung_CA(R,CAIR,NPANJ,RSIL,CIN,delr);
    disp(['Air sisa = ' num2str(CAIRSISA) ' %']);
    fprintf('\n');
    if abs(itime-NTIME)<0.001
        iterasi1=1;
        disp('-----');
        disp('<< Proses perhitungan selesai >>');
        disp('-----');
    else
        iterasi2=0;
        IPRINT=0;
        while iterasi2==0
            CAIR_hit=hitung_CAIR(AM,CAIR,NPANJ,AKG,RSIL,H,DE,YUD);
            CAIR=CAIR_hit;
            itime=itime+1;
            IPRINT=IPRINT+1;
        end
    end
end

```

```

        if (NPRINT-IPRINT)>0.001
            iterasi2=0;
        else
            iterasi2=1;
            iterasi1=0;
        end
    end
end
end
end

function CAIR_hit=hitung_CAIR(AM,CAIR,NPANJ,AKG,RSIL,H,DE,YUD)
B(1)=AM+4;
C(1)=-4;
D(1)=AM*CAIR(1);
for i=2:NPANJ
    A(i)=1-1/(2*i);
    B(i)=-2-AM;
    C(i)=1+1/(2*i);
    D(i)=-AM*CAIR(i);
end
A(NPANJ+1)=2*(NPANJ-0.5);
B(NPANJ+1)=-AM*(NPANJ-0.5)-2*(NPANJ-0.5)-2*AKG*RSIL*H/DE;
D(NPANJ+1)=-AM*(NPANJ-0.5)*CAIR(NPANJ+1)-2*AKG*RSIL*YUD/DE;
for i=2:(NPANJ+1)
    rasio=A(i)/B(i-1);
    B(i)=B(i)-rasio*C(i-1);
    D(i)=D(i)-rasio*D(i-1);
end
CAIR(NPANJ+1)=D(NPANJ+1)/B(NPANJ+1);
for i=NPANJ:-1:1
    CAIR(i)=(D(i)-C(i)*CAIR(i+1))/B(i);
end
CAIR_hit=CAIR;
end

```

```

function CAIRSISA_hit=hitung_CA(R,CAIR,NPANJ,RSIL,CIN,delr)
yhit=R.*CAIR;
CAIRSISA=delr*(yhit(1)+4*sum(yhit(2:2:NPANJ))+2*sum(yhit(3:2:NPANJ-
1))+yhit(NPANJ+1))/3;
CAIRSISA_hit=2*CAIRSISA*100/(RSIL.^2*CIN);
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

Waktu = 0

Jari-jari, cm	Kadar air, g/cm ³
0.000	0.2000000
0.200	0.2000000
0.400	0.2000000
0.600	0.2000000
0.800	0.2000000
1.000	0.2000000
1.200	0.2000000
1.400	0.2000000
1.600	0.2000000
1.800	0.2000000
2.000	0.2000000

Air sisa = 100 %

Waktu = 12.5

Jari-jari, cm	Kadar air, g/cm ³
0.000	0.1940158
0.200	0.1936986
0.400	0.1924712

0.600	0.1903952
0.800	0.1874007
1.000	0.1833738
1.200	0.1781932
1.400	0.1717574
1.600	0.1640076
1.800	0.1549462
2.000	0.1446468

 Air sisa = 85.3076 %

Waktu = 25

Jari-jari, cm	Kadar air, g/cm ³
0.000	0.1733794
0.200	0.1729287
0.400	0.1712157
0.600	0.1684450
0.800	0.1646861
1.000	0.1599756
1.200	0.1543443
1.400	0.1478279
1.600	0.1404728
1.800	0.1323393
2.000	0.1235031

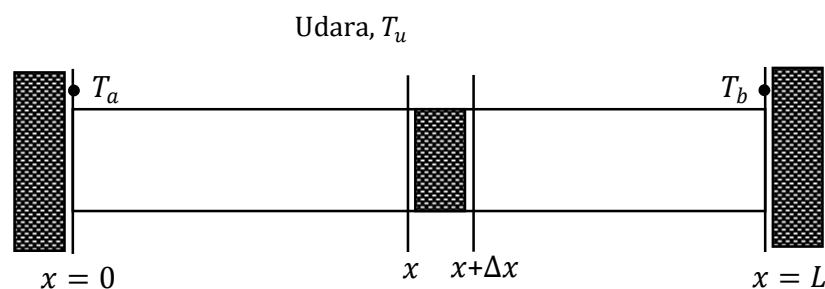
 Air sisa = 73.8435 %

 << Proses perhitungan selesai >>

8. Evaluasi Tetapan Tunggal dalam Model Matematis dengan Kuadrat Terkecil Numeris (Kombinasi antara *Golden-Setion* dan *Finite Difference Approximation*)

Dalam suatu penelitian, kadang-kadang besaran yang akan dicari tidak bisa diukur secara langsung. Misalnya ingin dicari besaran X, tetapi yang dapat diukur adalah besaran Y. Dengan bantuan model matematis, harga besaran X dapat dihitung berdasar harga besaran Y. Cara ini seringkali bisa menyederhanakan percobaan yang diperlukan dalam penelitian. Berikut ini ditunjukkan suatu contoh untuk kasus tersebut.

Suatu batang berdiameter D, panjang L, ujung-ujungnya melekat pada permukaan yang suhunya masing-masing T_a dan T_b (Gambar 5.11). Suhu udara di sekitar batang adalah T_u . Karena diameter batang sangat kecil dibanding panjangnya, maka gradien suhu dalam batang arah radial bisa diabaikan.



Gambar 5.11 Batang melekat pada dua permukaan berbeda suhu

Konduktivitas panas batang, $k=0,2$ cal/detik/cm/ $^{\circ}$ C. Diamati suhu batang pada berbagai posisi saat keadaan *steady* (ajeg). Data yang diperoleh:

x , cm	2	4	6	8
T , $^{\circ}$ C	299	222	170	128

Berdasarkan data tersebut, ingin dicari harga koefisien perpindahan panas dari permukaan batang ke udara, h .

Model matematis pada peristiwa ini telah dibahas dalam subbab 3.5. Bentuknya adalah:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{4h}{k.D} \cdot (T - T_u) = 0 \quad (5.100)$$

Finite difference approximation untuk persamaan di atas:

$$\frac{T_{i-1} - 2.T_i + T_{i+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{4.h}{k.D} (T_i - T_u) = 0 \quad (5.101)$$

Penyederhanaan persamaan (5.101) menghasilkan:

$$T_{i-1} + (-2 - \beta).T_i + T_{i+1} = -\beta.T_u \quad (5.102)$$

dengan

$$\beta = \frac{4.h.(\Delta x)^2}{k.D} \quad (5.103)$$

Persamaan (5.102) berlaku untuk $i=1,2,3,..., N-1$ (N =jumlah interval).

Khusus untuk $i=1$, karena $T_0 = T_a$ maka persamaan (5.102) berubah menjadi

$$(-2 - \beta).T_1 + T_2 = -\beta.T_u - T_a \quad (5.104)$$

Sedangkan untuk $i=N-1$, karena $T_N = T_b$, persamaan (5.102) berubah menjadi

$$T_{N-2} + (-2 - \beta).T_{N-1} = -\beta.T_u - T_b \quad (5.105)$$

Bila harga h diketahui, maka dengan persamaan (5.102), (5.104) dan (5.105), harga-harga $T_1, T_2, T_3, ..., T_{N-1}$ dapat dihitung (terbentuk persamaan matriks tridiagonal seperti pada subbab 4.6).

Pada kasus ini, harga T pada berbagai posisitelah tersedia, dan akan dicari harga h . Harga h dapat dicari dengan cara *trial and error* sampai diperoleh T hasil perhitungan mendekati T percobaan. Harga h terbaik adalah yang memberikan *sum of squares of errors*

$$SSE = \sum (T_{hitung} - T_{data})^2 = f(h) \quad (5.106)$$

yang minimum. Minimasi SSE dengan variabel h dapat dijalankan secara numeris dengan cara *golden-section*.

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut.

- a. Program pokok: Minimasi *Golden-Section*, $SSE = f(h)$.
- b. *Subroutine*: masukan h , keluaran SSE

Isi: penyelesaian persamaan matriks tridiagonal, sorting data yang seletak dengan data percobaan, perhitungan SSE

Contoh program komputer dalam MATLAB dengan data-data:

$D = 1,2$ cm; $L = 10$ cm; $T_a = 400$ °C; $T_b = 100$ °C; $T_u = 30$ °C; dan $k = 0,2$ cal/detik/cm/°C adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_58a
clc
clear all
D = input('Diameter batang (cm)           = ');
L = input('Panjang batang (cm)             = ');
TA = input('Suhu permukaan dinding kiri (oC) = ');
TB = input('Suhu permukaan dinding kanan (oC) = ');
TU = input('Suhu udara sekeliling (oC)       = ');
K = input('Konduktivitas panas batang (cal/det/cm/oC) = ');
X = input('Jarak dari dinding kiri (cm)       = ');
TDT = input('Suhu terukur (oC)               = ');
NINT = input('Jumlah interval (bil. genap)    = ');
HA = input('Perkiraan harga perpindahan panas h batas kiri (cal/det/cm2/oC) = ');
HB = input('Perkiraan harga perpindahan panas h batas kanan (cal/det/cm2/oC) = ');
TOL = input('Toleransi                      = ');
Hdata=[HA, HB];
delx=L/NINT;
jumdata=length(X);
disp('-----');
disp(' h - kiri    h - kanan    SSE - kiri    SSE - kanan ');
disp('-----');

H_optimasi=optimasi_H(Hdata,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata,TOL);
hhitung=H_optimasi(1);
SSEhit=H_optimasi(2);
Thit=feval(@H hitung_suhu(H,D,TA,TB,TU,K,NINT,delx),hhitung);
disp('-----');
disp(' Jarak (cm)    Suhu data    Suhu hitung ');
disp('-----');
for i=1:jumdata
    for j=2:NINT
        Xhit=(j-1)*delx;
        if abs(X(i)-Xhit)<0.01
            fprintf(' %1.2f    %4.4f    %4.4f \n',X(i),TDT(i),Thit(j));
        end
    end
end
end

```

```

disp('-----');
disp(['Nilai h-terbaik = ' num2str(hhitung) ' cal/det/cm2/C']);
disp(['SSE-minimum   = ' num2str(SSEhit)]);
disp('-----');
end

function Hhitung=optimasi_H(Hdata,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata,TOL)
H0A=Hdata(1);
H0B=Hdata(2);
al=(sqrt(5)-1)/2;
H0p=H0A+(1-al)*(H0B-H0A);
H0q=H0A+al*(H0B-H0A);
H0data=[H0A; H0B; H0p; H0q];
for i=1:4
    H=H0data(i);
    fxhit(i)=optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata);
end
fxa=fxhit(1);
fxb=fxhit(2);
fxp=fxhit(3);
fxq=fxhit(4);
ulang=1;
while ulang==1
    fprintf(' %2.6f   %2.6f   %2.6e   %2.6e \n',H0A,H0B,fxa,fxb);
    if abs(H0B-H0A)<=TOL
        H0opt=(H0B+H0A)/2;
        H=H0opt;
        fopt=optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata);
        break;
    else
        if fxp<fxq
            H0B=H0q;
            fxb=fxq;
            H0q=H0p;
            fxq=fxp;
            H0p=H0A+(1-al)*(H0B-H0A);
            H=H0p;
            fxp=optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata);

```

```

else
    H0A=H0p;
    fxa=fxp;
    H0p=H0q;
    fxp=fxq;
    H0q=H0A+a1*(H0B-H0A);
    H=H0q;
    fxq=optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata);
end
end
end
Hhitung=[H0opt, fopt];
end

function SSEhit=optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata)
Thit=hitung_suhu(H,D,TA,TB,TU,K,NINT,delx);
for i=1:jumdata
    for j=2:NINT
        Xhit=(j-1)*delx;
        if abs(X(i)-Xhit)<0.01
            SSE(i)=(TDT(i)-Thit(j)).^2;
        end
    end
end
end
SSEhit=sum(SSE);
end

function Thitung=hitung_suhu(H,D,TA,TB,TU,K,NINT,delx)
beta=4*H*delx.^2/(K*D);
A(2)=0;
B(2)=-2-beta;
C(2)=1;
D(2)=-beta*TU-TA;
for i=3:(NINT-1)
    A(i)=1;
    B(i)=-2-beta;
    C(i)=1;
    D(i)=-beta*TU;
end

```

```

A(NINT)=1;
B(NINT)=-2-beta;
C(NINT)=0;
D(NINT)=-beta*TU-TB;
for i=3:NINT
    rasio=A(i)/B(i-1);
    B(i)=B(i)-rasio*C(i-1);
    D(i)=D(i)-rasio*D(i-1);
end
Thit(NINT)=D(NINT)/B(NINT);
for i=(NINT-1):-1:2
    Thit(i)=(D(i)-C(i)*Thit(i+1))/B(i);
end
Thitung=Thit;
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

h - kiri	h - kanan	SSE - kiri	SSE - kanan
0.001000	0.010000	8.045989e+02	3.603478e+04
0.001000	0.006562	8.045989e+02	2.040954e+04
0.001000	0.004438	8.045989e+02	9.767674e+03
0.001000	0.003125	8.045989e+02	3.788842e+03
0.001000	0.002313	8.045989e+02	1.070014e+03
0.001000	0.001812	8.045989e+02	1.448247e+02
0.001310	0.001812	1.480693e+02	1.448247e+02
0.001310	0.001620	1.480693e+02	1.567628e+01
0.001428	0.001620	4.249465e+01	1.567628e+01
0.001502	0.001620	1.229638e+01	1.567628e+01
0.001502	0.001575	1.229638e+01	7.055161e+00
0.001530	0.001575	7.427058e+00	7.055161e+00
0.001547	0.001575	6.202855e+00	7.055161e+00
0.001547	0.001564	6.202855e+00	6.320033e+00

0.001547	0.001557	6.202855e+00	6.118115e+00
0.001551	0.001557	6.110248e+00	6.118115e+00

Jarak (cm)	Suhu data	Suhu hitung
2.00	299.0000	297.6278
4.00	222.0000	223.2211
6.00	170.0000	169.0047
8.00	128.0000	129.3135

Nilai h-terbaik	= 0.0015542 cal/det/cm ² /C
SSE-minimum	= 6.0899

Berikut ini disajikan program yang menggunakan *toolbox fminbnd*:

```
function Latihan_58
clc
clear all
D = input('Diameter batang (cm)');
L = input('Panjang batang (cm)');
TA = input('Suhu permukaan dinding kiri (oC)');
TB = input('Suhu permukaan dinding kanan (oC)');
TU = input('Suhu udara sekeliling (oC)');
K = input('Konduktivitas panas batang (cal/det/cm/oC)');
X = input('Jarak dari dinding kiri (cm)');
TDT = input('Suhu terukur (oC)');
NINT = input('Jumlah interval (bil. genap)');
HA = input('Perkiraan harga perpindahan panas h batas kiri (cal/det/cm2/oC)');
HB = input('Perkiraan harga perpindahan panas h batas kanan (cal/det/cm2/oC)');
```



```

delx=L/NINT;
jumdata=length(X);
[hhitung,SSEhit]=fminbnd(@(H) optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata),HA,HB);
Thit=feval(@(H) hitung_suhu(H,D,TA,TB,TU,K,NINT,delx),hhitung);
disp('-----');
disp('  Jarak (cm)    Suhu data    Suhu hitung  ');
disp('-----');
for i=1:jumdata
    for j=2:NINT
        Xhit=(j-1)*delx;
        if abs(X(i)-Xhit)<0.01
            fprintf('    %1.2f        %4.4f        %4.4f  \n',X(i),TDT(i),Thit(j));
        end
    end
end
disp('-----');
disp(['Nilai h-terbaik = ' num2str(hhitung) ' cal/det/cm2/C']);
disp(['SSE-minimum    = ' num2str(SSEhit)]);
disp('-----');
end

function SSEhit=optimasi_h(H,D,TA,TB,TU,K,X,TDT,NINT,delx,jumdata)
Thit=hitung_suhu(H,D,TA,TB,TU,K,NINT,delx);
for i=1:jumdata
    for j=2:NINT
        Xhit=(j-1)*delx;
        if abs(X(i)-Xhit)<0.01
            SSE(i)=(TDT(i)-Thit(j)).^2;
        end
    end
end
SSEhit=sum(SSE);
end

function Thitung=hitung_suhu(H,D,TA,TB,TU,K,NINT,delx)
beta=4*H*delx.^2/(K*D);
A(2)=0;
B(2)=-2-beta;
C(2)=1;
D(2)=-beta*TU-TA;

```

```

for i=3:(NINT-1)
    A(i)=1;
    B(i)=-2-beta;
    C(i)=1;
    D(i)=-beta*TU;
end
A(NINT)=1;
B(NINT)=-2-beta;
C(NINT)=0;
D(NINT)=-beta*TU-TB;
for i=3:NINT
    rasio=A(i)/B(i-1);
    B(i)=B(i)-rasio*C(i-1);
    D(i)=D(i)-rasio*D(i-1);
end
Thit(NINT)=D(NINT)/B(NINT);
for i=(NINT-1):-1:2
    Thit(i)=(D(i)-C(i)*Thit(i+1))/B(i);
end
Thitung=Thit;
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

Jarak (cm)	Suhu data	Suhu hitung
2.00	299.0000	297.2718
4.00	222.0000	222.7602
6.00	170.0000	168.5989
8.00	128.0000	129.0699

Nilai h-terbaik = 0.0015701 cal/det/cm²/C
 SSE-minimum = 6.6725

9. Evaluasi Kinetika Reaksi Berdasar Data Reaktor *Batch* Adiabatik (Kombinasi Hooke-Jeeves dan Simpson)

Reaksi fasa cair eksotermis, $A \rightarrow B$, dijalankan dalam sebuah reaktor tangki berpengaduk yang bekerja secara *batch* dan adiabatik. Kadar A dalam reaktor kecil. Data operasi reaktor tersebut untuk konsentrasi A awal, $C_{A0} = 1,6 \text{ gmol/L}$ adalah sebagai berikut:

waktu (menit)	konversi A	suhu (K)
0	0	340
30	0,11	344
60	0,28	350
90	0,53	359
120	0,78	369
150	0,90	373

Ingin dicari kinetika (persamaan kecepatan reaksi) untuk reaksi tersebut.

Dalam menyusun model matematis kasus ini dicoba dipakai asumsi-asumsi berikut:

1. Volum campuran tetap (karena kadar A kecil).
2. Panas reaksi λ pada interval suhu reaksi tidak berubah banyak ($\approx$ tetap).
3. Kapasitas panas campuran tetap.
4. Pengadukan sempurna sehingga campuran bersifat homogen.
5. Panas yang diserap oleh tangki dan pengaduk diabaikan.

Jika nanti hasil perhitungan bisa mendekati data-data operasi, maka model dan asumsi-asumsi dapat dipakai. Sebaliknya, jika tidak maka perlu dilakukan penyempurnaan model matematis dan asumsi-asumsinya.

Neraca massa A dalam cairan dalam reaktor:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$0 - 0 - V_R \cdot k \cdot C_A^n = \frac{d}{dt}(V_R \cdot C_A) \quad (5.107)$$

Karena V_R dianggap tetap, maka diperoleh

$$\frac{dC_A}{dt} = -k \cdot C_A^n \quad (5.108)$$

Misal konversi A = x, maka

$$C_A = C_{A0} \cdot (1 - x) \quad (5.109)$$

Substitusi persamaan (5.109) ke persamaan (5.108) menghasilkan

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot C_{A0}^{n-1} \cdot (1-x)^n \quad (5.110)$$

$$t = \frac{1}{C_{A0}^{n-1}} \int_0^x \frac{dx}{k \cdot (1-x)^n} \quad (5.111)$$

Harga k dalam persamaan (5.111) tidak bisa keluar dari integral karena reaktor adiabatik dan reaksi eksotermis sehingga suhu berubah dan harga k juga berubah. Oleh karena itu persamaan (5.111) belum bisa diintegrasikan. Dicoba persamaan Arrhenius untuk hubungan k dengan T .

$$k = A_r \cdot \exp \left[-\frac{B_r}{T} \right] \quad (5.112)$$

Neraca panas:

Panas untuk menaikkan suhu = panas reaksi

$$V_R \cdot \rho \cdot C_p \cdot (T - T_0) = V_R \cdot C_{A0} \cdot x \cdot (-\Delta H_R) \quad (5.113)$$

dengan T_0 adalah suhu awal. Manipulasi persamaan (5.113) menghasilkan

$$T = T_0 + C_{A0} \cdot \frac{(-\Delta H_R)}{\rho \cdot C_p} \cdot x \quad (5.114)$$

Misal $\beta = \frac{(-\Delta H_R)}{\rho \cdot C_p}$, maka diperoleh:

$$T = T_0 + C_{A0} \cdot \beta \cdot x \quad (5.115)$$

Jadi, jika persamaan (5.115) benar, maka hubungan antara T dengan x linier. Selanjutnya dengan membuat regresi linier persamaan $T = a_0 + a_1 \cdot x$ dengan cara seperti pada sub-bab 4.7. Berdasar data operasi diperoleh korelasi linier yaitu

$$T = 339,8 + 36,89 \cdot x \quad (5.116)$$

Persamaan (5.116) disederhanakan menjadi

$$T = 340 + 36,89 \cdot x \quad (5.117)$$

Perbandingan antara T hasil regresi dengan data adalah sebagai berikut:

Konversi, x	T_{regresi}	T_{data}
0	340	340
0,11	344,06	344
0,28	350,33	350
0,53	359,55	359
0,78	368,78	369
0,90	373,21	373

Hasil regresi mendekati data operasi. Jadi persamaan (5.117) dapat dipakai. Dari regresi juga dapat diperoleh harga:

$$C_{A0} \cdot \beta = 36,89$$

sehingga:

$$\beta = 23,06$$

Persamaan-persamaan yang diperoleh adalah:

$$t = \frac{1}{C_{A0}^{n-1}} \int_0^x \frac{dx}{k \cdot (1-x)^n} \quad (5.111)$$

$$k = A_r \cdot \exp \left[-\frac{B_r}{T} \right] \quad (5.112)$$

$$T = T_0 + C_{A0} \cdot \beta \cdot x \quad (\beta = 23,06) \quad (5.115)$$

Sekarang yang perlu dicari adalah harga A_r dan B_r . Dicoba berbagai harga A_r dan B_r (untuk n tertentu) sampai diperoleh waktu hasil perhitungan (t_{hit}) berdasar persamaan-persamaan (5.111), (5.112) dan (5.115) yang paling dekat dengan data. Secara lebih spesifik, dicari harga A_r dan B_r yang memberikan:

$$SSE = \sum (t_{hit} - t_{dat})^2 \quad (5.118)$$

yang minimum. Minimasi SSE dengan dua variabel (A_r dan B_r) ini dijalankan secara numeris dengan cara Hooke-Jeeves.

Program komputer dengan MATLAB untuk perhitungan di atas adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_59b
clc
clear all
CAO=input('Konsentrasi A mula-mula (gmol/L) = ');
TO= input('Suhu awal (K) = ');
BETA=input('Harga beta = ');
WKTD= input('Waktu data (menit) = ');
XDT= input('Konversi data = ');
TDT= input('Suhu data (K) = ');
AOPT= input('Tebawakan awal A = ');
BOPT= input('Tebawakan awal B = ');
```

```

N= input('Orde reaksi          = ');
NINT= input('Banyaknya interval      = ');
DELXA=input('Delta x1              = ');
DELXBinput('Delta x2              = ');
TOLXA=input('Toleransi x1          = ');
TOLXB=input('Toleransi x2          = ');
RASIO=input('Perbandingan delta baru dan delta lama = ');

NDT=length(XDT);
VAROPT=[AOPT,BOPT];
disp('-----');
disp('    A        B        SSE    ');
disp('-----');

VOPT=proses_optimasi(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT,DELXA,DELXB,TOLXA,TOLXB,RASIO);
VAROPT=[VOPT(1),VOPT(2)];
wkthit=0;
disp('-----');
disp('  Konversi    Waktu (data)    Waktu (hitung)  ');
disp('-----');
fprintf('    %1.3f    %4.0f    %4.4f  \n',XDT(1),WKTDT(1),wkthit);
for i=2:NDT
    X=XDT(i);
    waktu_hit=hitung_integral(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N,NINT);
    wkthit=waktu_hit/CAO.^(N-1);
    fprintf('    %1.3f    %4.0f    %4.4f  \n',X,WKTDT(i),wkthit);
end
disp('-----');
fprintf('Nilai A-terbaik = %1.6e \n',VOPT(1));
fprintf('Nilai B-terbaik = %6.2f \n',VOPT(2));
fprintf('SSE-minimum    = %5.3f \n',VOPT(3));
disp('-----');
end

function
foptimasi=proses_optimasi(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT,DELXA,DELXB,TOLXA,TOLXB,RASIO)
x1opt=VAROPT(1);
x2opt=VAROPT(2);
VAROPT=[x1opt,x2opt];
SSE_OPT=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT);

```

```

fprintf(' %1.6e   %6.2f   %1.6e \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
ulang1=1;
while ulang1==1
    tanda1=0;
    tanda2=0;
    x1=x1opt+DELXA;
    x2=x2opt;
    VAROPT=[x1,x2];
    FSSE=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT);
    if FSSE>=SSE_OPT
        x1=x1opt-DELXA;
        VAROPT=[x1,x2];
        FSSE=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT);
        if FSSE<SSE_OPT
            SSE_OPT=FSSE;
            x1opt=x1;
            tanda1=-1;
            fprintf(' %1.6e   %6.2f   %1.6e \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
        end
    else
        SSE_OPT=FSSE;
        x1opt=x1;
        tanda1=1;
        fprintf(' %1.6e   %6.2f   %1.6e \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
    end
    x1=x1opt;
    x2=x2opt+DELXB;
    VAROPT=[x1,x2];
    FSSE=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT);
    if FSSE>=SSE_OPT
        x2=x2opt-DELXB;
        VAROPT=[x1,x2];
        FSSE=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT);
        if FSSE<SSE_OPT
            SSE_OPT=FSSE;
            x2opt=x2;
            tanda2=-1;
            fprintf(' %1.6e   %6.2f   %1.6e \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
        end
    else

```

```

    SSE_OPT=FSSE;
    x2opt=x2;
    tanda2=1;
    fprintf(' %1.6e   %6.2f   %1.6e \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
end
if abs(tanda1)>0.2 || abs(tanda2)>0.2
    ulang2=1;
    while ulang2==1
        x1=x1opt+DELXA*tanda1;
        x2=x2opt+DELXB*tanda2;
        VAROPT=[x1,x2];
        FSSE=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTD,XT,N,NDT,NINT);
        if FSSE>=SSE_OPT
            ulang2=0;
        else
            x1opt=x1;
            x2opt=x2;
            SSE_OPT=FSSE;
        end
    end
else
    if (DELXA<TOLXA) && (DELXB<TOLXB)
        VAROPT=[x1opt,x2opt];
        FSSE=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTD,XT,N,NDT,NINT);
        foptimasi=[x1opt,x2opt,FSSE];
        break;
    else
        DELXA=RASIO*DELXA;
        DELXB=RASIO*DELXB;
    end
end
end
end
end

function SSEhit=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTD,XT,N,NDT,NINT)
for i=2:NDT
    X=XT(i);
    WDAT=WKTD(i);
    thit_integral=hitung_integral(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N,NINT);
    thit=thit_integral/CAO.^(N-1);
    SSE(i)=(WDAT-thit).^2;
end

```



```

SSEhit=sum(SSE);
end

function finteg=hitung_integral(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N,NINT)
DELX=(X-0)/NINT;
XDAT=[0:DELX:X];
for i=1:(NINT+1)
    X=XDAT(i);
    FX(i)=hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N);
end
finteg=(DELX/3)*(FX(1)+4*sum(FX(2:2:NINT))+2*sum(FX(3:2:NINT-1))+FX(end));
end

function thitung=hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N)
T=TO+CAO*BETA*X;
k=VAROPT(1)*exp(-VAROPT(2)./T);
thitung=1./(k.*(1-X).^N);
end

```

Keluaran program (untuk $n = 1$) adalah:

A	B	SSE
3.000000e+18	18000.00	1.899801e+08
4.000000e+18	18000.00	1.057375e+08
4.000000e+18	17500.00	5.149468e+06
5.000000e+18	16500.00	1.286916e+04
2.400000e+18	16500.00	1.493998e+03
2.616000e+18	16500.00	1.333983e+03
2.538240e+18	16500.00	1.305120e+03
2.555036e+18	16500.00	1.304096e+03
2.548990e+18	16500.00	1.303980e+03

Konversi	Waktu (data)	Waktu (hitung)
0.000	0	0.0000
0.110	30	41.1959
0.280	60	78.0540
0.530	90	104.4401
0.780	120	118.4114
0.900	150	124.6693
Nilai A-terbaik = 2.548990e+18 Nilai B-terbaik = 16500.00 SSE-minimum = 1303.980		

Dari hasil perhitungan terlihat bahwa jika diambil nilai orde reaksi (n) = 1, waktu hitung jauh menyimpang dari waktu data. Dengan demikian nilai $n = 1$ dianggap tidak cocok. Selanjutnya dilakukan perhitungan dengan menggunakan nilai $n = 2$. Adapun hasilnya adalah sebagai berikut:

A	B	SSE
3.000000e+18	18000.00	1.454369e+08
4.000000e+18	18000.00	8.080665e+07
4.000000e+18	17500.00	3.969547e+06
5.000000e+18	16500.00	1.429679e+04
2.600000e+18	16500.00	6.071111e+02
2.240000e+18	16500.00	5.778130e+01
2.369600e+18	16500.00	3.293934e+01
2.291840e+18	16500.00	9.214130e+00
2.319834e+18	16500.00	5.313923e+00
2.309756e+18	16500.00	5.021256e+00
2.315803e+18	16500.00	4.972515e+00

Konversi	Waktu (data)	Waktu (hitung)
0.000	0	0.0000
0.110	30	29.8911
0.280	60	61.1494
0.530	90	91.2724
0.780	120	119.7433
0.900	150	148.6019
Nilai A-terbaik = 2.315803e+18 Nilai B-terbaik = 16500.00 SSE-minimum = 4.973		

Dari hasil program di atas ternyata waktu terhitung untuk $n=2$ cukup dekat dengan data operasi, sehingga model matematika dan asumsi-asumsinya dapat dipakai. Selain diperoleh nilai order reaksi (n)=2, diperoleh pula harga

$$k = 2,31 \cdot 10^{18} \cdot \exp\left(-\frac{16500}{T}\right) \quad (5.119)$$

Tetapan-tetapan yang diperoleh pada kesimpulan dapat dimanfaatkan untuk perancangan alat lain dengan kondisi berbeda (misalnya C_{A0} , T_0 dan lain-lain) dan alat yang berbeda (misalnya reaktor kontinyu), karena tetapan-tetapan tersebut berlaku umum (disebut tetapan-tetapan perancangan).

Dalam membahas contoh aplikasi 9 ini, penyusun ingin menyampaikan konsep yang sering dipakai dalam perancangan, sebagai berikut:

“Data dari pabrik/alat yang sudah ada atau data penelitian umumnya tidak dapat langsung dipakai untuk perancangan alat lain karena perbedaan-perbedaan kondisi. Meskipun demikian ada besaran-besaran tertentu (tetapan perancangan) yang harganya bisa dievaluasi berdasar data dari alat yang sudah ada dan bisa dipakai untuk merancangan alat lain (mungkin dengan alat/proses yang berbeda). Tetapan perancangan tersebut bisa diperoleh dengan bantuan model matematis”.

Berikut ini disajikan program dengan menggunakan *toolbox fminsearch* untuk optimasi sedangkan integral menggunakan *toolbox integral*.

```

function Latihan_59
clc
clear all
CAO = input('Konsentrasi A mula-mula (gmol/L) = ');
TO = input('Suhu awal (K) = ');
BETA = input('Harga beta = ');
WKTDT = input('Waktu data (menit) = ');
XDT = input('Konversi data = ');
TDT = input('Suhu data (K) = ');
AOPT = input('Tebawakan awal A = ');
BOPT = input('Tebawakan awal B = ');
N = input('Orde reaksi = ');
NDT=length(XDT);
VAROPT=[AOPT,BOPT];
[VOPT,SSEOPT]=fminsearch(@(VAROPT)
hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT),VAROPT);
VAROPT=VOPT;
disp('-----');
disp('  Konversi    Waktu (data)    Waktu (hitung)  ');
disp('-----');
for i=2:NDT
    X=XDT(i);
    waktu_hit=integral(@(X) hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N),0,X);
    wkthit=waktu_hit/CAO.^(N-1);
    fprintf('    %1.4f    %4.4f    %4.4f  \n',X,WKTDT(i),wkthit);
end
disp('-----');
disp(['Nilai A-terbaik = ' num2str(VOPT(1))]);
disp(['Nilai B-terbaik = ' num2str(VOPT(2))]);
disp(['SSE-minimum    = ' num2str(SSEOPT)]);
disp('-----');
end

```

```

function SSEhit=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT)
for i=2:NDT
    XDAT=XDT(i);
    WDAT=WKTDT(i);
    thit_integral=integral(@(X) hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N),0,XDAT);
    thit=thit_integral/CAO.^(N-1);
    SSE(i)=(WDAT-thit).^2;
end
SSEhit=sum(SSE);
end

function thitung=hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N)
T=TO+CAO*BETA*X;
k=VAROPT(1)*exp(-VAROPT(2)./T);
thitung=1./(k.*(1-X).^N);
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

Konsentrasi A mula-mula (gmol/L)	= 1.6
Suhu awal (K)	= 340
Harga beta	= 23.06
Waktu data (menit)	= [0,30,60,90,120,150]
Konversi data	= [0,0.11,0.28,0.53,0.78,0.9]
Suhu data (K)	= [340,344,350,359,369,373]
Tebawakan awal A	= 3e18
Tebawakan awal B	= 18000
Orde reaksi	= 2

Konversi	Waktu (data)	Waktu (hitung)
0.0000	0.0000	0.0000
0.1100	30.0000	29.1879
0.2800	60.0000	60.1072
0.5300	90.0000	90.4731
0.7800	120.0000	119.8373
0.9000	150.0000	149.9597
Nilai A-terbaik	= 9.773313e+17	
Nilai B-terbaik	= 16196.90	
SSE-minimum	= 0.923	

Berikut ini disajikan program dengan menggunakan *toolbox fminsearch* untuk optimasi sedangkan integral menggunakan metode Simpson-Rule.

```
function Latihan_59a
clc
clear all
CAO = input('Konsentrasi A mula-mula (gmol/L) = ');
TO = input('Suhu awal (K) = ');
BETA = input('Harga beta = ');
WKTDT= input('Waktu data (menit) = ');
XDT = input('Konversi data = ');
TDT = input('Suhu data (K) = ');
AOPT = input('Tebawakan awal A = ');
BOPT = input('Tebawakan awal B = ');
N = input('Orde reaksi = ');
NINT = input('Banyaknya interval = ');
```

```

NDT=length(XDT);
VAROPT=[AOPT,BOPT];
[VOPT,SSEOPT]=fminsearch(@(VAROPT)
hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT),VAROPT);
VAROPT=VOPT;
wkthit=0;
disp('-----');
disp('  Konversi    Waktu (data)    Waktu (hitung) ');
disp('-----');
fprintf('    %1.3f      %4.0f      %4.4f \n',XDT(1),WKTDT(1),wkthit);
for i=2:NDT
    X=XDT(i);
    waktu_hit=hitung_integral(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N,NINT);
    wkthit=waktu_hit/CAO.^(N-1);
    fprintf('    %1.3f      %4.0f      %4.4f \n',X,WKTDT(i),wkthit);
end
disp('-----');
fprintf('Nilai A-terbaik = %1.6e \n',VOPT(1));
fprintf('Nilai B-terbaik = %6.2f \n',VOPT(2));
fprintf('SSE-minimum    = %5.3f \n',SSEOPT);
disp('-----');
end

function SSEhit=hitung_SSE(VAROPT,CAO,TO,BETA,WKTDT,XDT,N,NDT,NINT)
for i=2:NDT
    X=XDT(i);
    WDAT=WKTDT(i);
    thit_integral=hitung_integral(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N,NINT);
    thit=thit_integral/CAO.^(N-1);
    SSE(i)=(WDAT-thit).^2;
end
SSEhit=sum(SSE);
end

function finteg=hitung_integral(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N,NINT)
DELX=(X-0)/NINT;
XDAT=[0:DELX:X];
for i=1:(NINT+1)
    X=XDAT(i);
    FX(i)=hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N);
end

```

```

finteg=(DELX/3)*(FX(1)+4*sum(FX(2:2:NINT))+2*sum(FX(3:2:NINT-1))+FX(end));
end

function thitung=hitung_waktu(X,VAROPT,CAO,TO,BETA,N)
T=TO+CAO*BETA*X;
k=VAROPT(1)*exp(-VAROPT(2)./T);
thitung=1./(k.*(1-X).^N);
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

```

Konsentrasi A mula-mula (gmol/L) = 1.6
Suhu awal (K) = 340
Harga beta = 23.06
Waktu data (menit) = [0,30,60,90,120,150]
Konversi data = [0,0.11,0.28,0.53,0.78,0.9]
Suhu data (K) = [340,344,350,359,369,373]
Tebawakan awal A = 3e18
Tebawakan awal B = 18000
Orde reaksi = 2
'Banyaknya interval = 20

```

Konversi	Waktu (data)	Waktu (hitung)
0.000	0	0.0000
0.110	30	29.2021
0.280	60	60.1235
0.530	90	90.4727
0.780	120	119.8008
0.900	150	149.9799

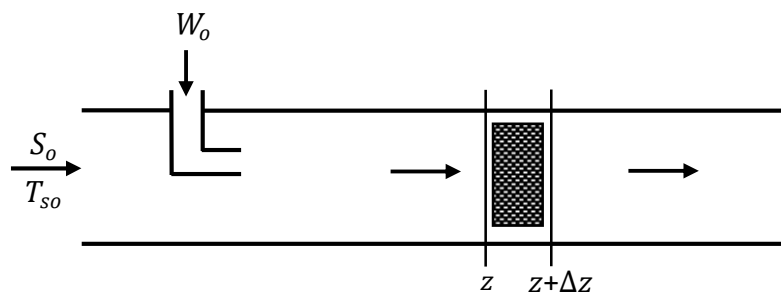
```

-----
Nilai A-terbaik = 1.005593e+18
Nilai B-terbaik = 16206.81
SSE-minimum = 0.915
-----

```


10. Desuperheater dengan Kontak Langsung

Suatu pabrik memerlukan *steam* bertekanan P yang suhunya mendekati suhu jenuhnya (T_{sat}), sedangkan yang tersedia adalah *steam* lewat jenuh (*superheated*) bertekanan P dan bersuhu T_{s0} . Oleh karena itu suhu *steam* perlu diturunkan sampai mendekati T_{sat} . *Steam* lewat jenuh sebanyak S_0 massa/waktu dicampur dengan air yang suhunya $T_{w0} < T_{sat}$ berjumlah W_0 massa/waktu dalam desuperheater seperti terlihat pada gambar 5.12. Diharapkan air tersebut menguap dan penguapan tersebut akan mengambil panas dari *steam* sehingga suhu *steam* menjadi turun dan mencapai keadaan jenuh. Kapasitas panas air dan *steam* masing-masing cp_w dan cp_s . Panas penguapan air pada suhu T_{sat} adalah λ . Diameter dalam tabung = D_t . Proses dianggap adiabatik dan tekanan sepanjang tabung dianggap tetap P . Ingin dicari suhu *steam* (T_s), suhu air (T_w) dan jumlah air (W) pada berbagai posisi pada keadaan *steady*.



Gambar 5.12 Skema desuperheater

Pada proses ini desuperheater terbagi menjadi 2 zona. Pada zona 1 (heating-up), *steam* memberikan panas pada air sehingga suhu *steam* turun sedang suhu air naik. Dalam hal ini jumlah air tetap karena belum terjadi penguapan. Proses ini berlangsung sampai suhu air mencapai T_{sat} . Zona 1 umumnya sangat pendek jadi bila perlu bisa diabaikan dan suhu air dianggap langsung berubah menjadi T_{sat} . Pada zona 2 (*evaporation*), *steam* memberikan panas ke air dan panas tersebut dipakai untuk menguapkan sebagian air. Jadi pada zona ini suhu *steam* turun sedang suhu air tetap, tetapi jumlah jadi air berkurang.

Model matematis untuk zona 1 disusun sebagai berikut:

Neraca panas air pada elemen volum:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$[w_0 \cdot Cp_w \cdot T_w|_z + h \cdot \Delta A \cdot (\bar{T}_s - \bar{T}_w)] - (w_0 \cdot Cp_w \cdot T_w|_{z+\Delta z}) = 0 \quad (5.120)$$

(dalam hal ini ΔA adalah luas permukaan air pada elemen volum)

$$[w_0 \cdot Cp_w \cdot T_w|_z + h \cdot a \cdot \Delta m \cdot (\bar{T}_s - \bar{T}_w)] - (w_0 \cdot Cp_w \cdot T_w|_{z+\Delta z}) = 0 \quad (5.121)$$

(dalam hal ini a = luas permukaan air tiap massa air, Δm = massa air dalam elemen volum).

Jika *steam* dianggap gas ideal maka rapat massanya $= \frac{P \cdot M}{R \cdot T_s}$. Selanjutnya dianggap volum yang ditempati air bisa diabaikan. Karena massa air dan *steam* pada zona ini tetap, maka persamaan (5.121) dapat diubah menjadi:

$$\left[w_0 Cp_w \cdot T_w|_z + h \cdot a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot Dt^2 \cdot \Delta z \cdot \frac{P \cdot M}{R \cdot T_s} \cdot \frac{w_0}{S_0} \cdot (\bar{T}_s - \bar{T}_w) \right] - (w_0 Cp_w \cdot T_w|_{z+\Delta z}) = 0 \quad (5.122)$$

$$\frac{T_w|_{z+\Delta z} - T_w|_z}{\Delta z} = \frac{\pi \cdot h \cdot a \cdot Dt^2 \cdot P \cdot M}{4 \cdot Cp_w \cdot R \cdot S_0 \cdot T_s} = (\bar{T}_s - \bar{T}_w) \quad (5.123)$$

$$\frac{dT_w}{dz} = \frac{\pi \cdot h \cdot a \cdot Dt^2 \cdot P \cdot M}{4 \cdot Cp_w \cdot R \cdot S_0 \cdot T_s} (T_s - T_w) \quad (5.124)$$

Neraca panas total (air dan steam) dari $z=0$ sampai $z = z$:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$\begin{aligned} & (S_0 (Cp_w T_{sat} + \lambda + Cp_s (T_{s0} - T_{sat})) + W_0 Cp_w \cdot T_{w0}) \\ & - (S_0 (Cp_w T_{sat} + \lambda + Cp_s (T_s - T_{sat})) + W_0 Cp_w \cdot T_w) = 0 \end{aligned} \quad (5.125)$$

$$T_s = T_{s0} - \frac{W_0 Cp_w}{S_0 Cp_s} (T_w - T_{w0}) \quad (5.126)$$

Keadaan batas:

$$z = 0; T_w = T_{w0}; T_s = T_{s0} \quad (5.127)$$

Persamaan (5.124) diselesaikan secara numeris dengan Runge-Kutta, dengan bantuan persamaan (5.126) dan keadaan batas (5.127).

Model matematis untuk zona 2 disusun sebagai berikut (pada zona ini $T_w = T_{sat}$).

Neraca panas air pada elemen volum:

$$\text{Panas untuk penguapan air} = \text{Panas diterima dari steam}$$

$$-\Delta W \cdot (\lambda + Cp_s (\bar{T}_s - T_{sat})) = h \cdot a \cdot \Delta m \cdot (\bar{T}_s - T_{sat}) \quad (5.128)$$

Dalam hal ini nilai a diasumsi tetap (turbulensi aliran dianggap tidak berubah). Dengan logika yang sama dengan pada penjabaran persamaan (5.122) diperoleh:

$$-\Delta W \cdot (\lambda + C_{ps}(\bar{T}_s - T_{sat})) = h \cdot a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot Dt^2 \cdot \Delta Z \cdot \frac{P.M}{R.T_s} \cdot \frac{W}{S} (\bar{T}_s - T_{sat}) \quad (5.129)$$

$$\frac{\Delta W}{\Delta z} = - \frac{\pi \cdot h \cdot a \cdot Dt^2 \cdot P.M.W}{4 \cdot R.T_s.S} \cdot \frac{(T_s - T_{sat})}{(\lambda + C_{ps}(T_s - T_{sat}))} \quad (5.130)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, diperoleh:

$$\frac{dW}{dz} = - \frac{\pi \cdot h \cdot a \cdot Dt^2 \cdot P.M.W}{4 \cdot R.T_s.S} \cdot \frac{(T_s - T_{sat})}{(\lambda + C_{ps}(T_s - T_{sat}))} \quad (5.131)$$

Neraca panas total (air dan *steam*) dari $z = 0$ sampai $z = z$:

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$(S_0(C_{pw}T_{sat} + \lambda + C_{ps}(T_{s0} - T_{sat})) + W_0C_{pw}T_{w0}) - (S(C_{pw}T_{sat} + \lambda + C_{ps}(T_s - T_{sat})) + WC_{pw}T_{sat}) = 0 \quad (5.132)$$

$$T_s = T_{sat} - \frac{\lambda}{C_{ps}} \left[\frac{S - S_0}{S} \right] - \left[\frac{S - S_0}{S} \right] \frac{C_{pw}}{C_{ps}} \cdot T_{sat} + \frac{S_0}{S} (T_{s0} - T_{sat}) - \left[\frac{W_0 - W}{S} \right] \frac{C_{pw}}{C_{ps}} \cdot T_{sat} - \frac{W_0 C_{pw}}{S C_{ps}} (T_{sat} - T_{w0}) \quad (5.133)$$

Neraca massa total dari $z = 0$ sampai $z = z$:

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$(S_0 + W_0) - (S + W) = 0$$

$$S = S_0 + (W_0 - W) \quad (5.135)$$

Karena dari persamaan (5.135) diperoleh bahwa $S - S_0 = W_0 - W$, maka persamaan (5.133) berubah menjadi:

$$T_s = T_{sat} - \frac{\lambda}{C_{ps}} \left[\frac{S - S_0}{S} \right] + \left[\frac{S_0}{S} \right] (T_{s0} - T_{sat}) - \frac{W_0 C_{pw}}{S C_{ps}} (T_{sat} - T_{w0}) \quad (5.136)$$

Keadaan batas zona ini adalah:

$$z = L; \quad T_s = T_{sL}; \quad W = W_0 \quad (5.137)$$

Dalam hal ini L adalah posisi batas zona 1 dan 2, yang diperoleh dari penyelesaian model matematis zona 1 sampai didapat $T_w = T_{sat}$, sedang T_{sL} adalah T_s pada batas tersebut. Persamaan (5.131) diselesaikan secara numeris dengan Runge Kutta, dengan bantuan persamaan (5.136) dan keadaan batas (5.137).

Program komputer untuk pelaksanaan perhitungan *desuperheater* (zona 1 dan zona 2) adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_510a
clc
clear all
data=[14000,2100,640,300,0.305,443,0.5,1,488,900,60,0.082,8,18,0.02,200,10];

disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Jumlah uap masuk           = ' num2str(data(1)) ' kg/jam']);
disp(['Jumlah cairan masuk        = ' num2str(data(2)) ' kg/jam']);
disp(['Suhu uap masuk              = ' num2str(data(3)) ' K']);
disp(['Suhu cairan masuk           = ' num2str(data(4)) ' K']);
disp(['Diameter pipa               = ' num2str(data(5)) ' m']);
disp(['Suhu jenuh                   = ' num2str(data(6)) ' K']);
disp(['Kapasitas panas uap          = ' num2str(data(7)) ' kkal/kg/K']);
disp(['Kapasitas panas cairan       = ' num2str(data(8)) ' kkal/kg/K']);
disp(['Panas penguapan cairan pada Tsat = ' num2str(data(9)) ' kkal/kg']);
disp(['Koefisien perpindahan panas   = ' num2str(data(10)) ' kkal/jam/m2/K']);
disp(['Luas permukaan cairan        = ' num2str(data(11)) ' m2/kg-cairan']);
disp(['Tetapan gas                  = ' num2str(data(12)) ' m3.atm/kgmol/K']);
disp(['Tekanan                      = ' num2str(data(13)) ' atm']);
disp(['Berat molekul                 = ' num2str(data(14)) ' kg/kgmol']);
disp(['Interval panjang            = ' num2str(data(15)) ' m']);
disp(['Jumlah interval panjang       = ' num2str(data(16))]);
disp(['Jumlah interval panjang sampai cetak = ' num2str(data(17))]);
disp('-----');
batasz=data(15)*data(16);
TW=data(4);
disp('-----');
disp(' z (m)   Ts (C)   Tw (C)   Water (kg/hr) ');
disp('-----');
ulang=0;
zakh1=data(15)*data(17);
ZO=0;
WO=data(2);
TSO=data(3);
TWO=data(4);
TSAT=data(6);
Twhit=TWO;

```

```

ZZ=1;
TS=TSO;
S=data(1);
delz=data(15);
fprintf(' %1.3f %4.4f %4.4f %4.3f \n',ZO,TSO,TWO,WO);
while ulang==0;
    zakh=zakh1*ZZ;
    if zakh>batas
        ulang=1;
    else
        if Twhit<TSAT
            WOO=WO;
            z=[0:delz:zakh];
            jumz=length(z);
            param=1;
            kons=TW;
            [zhit, Thit]=hitung_ode(z,kons,data,S,TS,delz,param);
            Twhit=Thit(jumz);
            TS=data(3)-data(2)*data(8)*(Thit(jumz)-data(4))/(data(1)*data(7));
            if Twhit>=TSAT
                Zawal=zhit(jumz);
                TSO=TS;
                TWO=TSAT;
                Twhit=TSAT;
            end
        else
            z=[Zawal:delz:zakh];
            jumz=length(z);
            kons=data(2);
            param=2;
            [zhit, Whit]=hitung_ode(z,kons,data,S,TS,delz,param);
            WOO=Whit(jumz);
            S=data(1)+(data(2)-WOO);
            TS=TSAT-data(9)*(S-data(1))/(data(7)*S)+data(1)*(TSO-TSAT)/S-WO*data(8)*(TSAT-
            TWO)/(S*data(7));
        end
        fprintf(' %1.3f %4.4f %4.4f %4.3f \n',zakh,TS,Twhit,WOO);
        ZZ=ZZ+1;
        ulang=0;
    end
end
end

```

```
function [x, y]=hitung_ode(z,kons,data,S,TS,delz,param)
```

```
x=z;
```

```
y(1)=kons;
```

```
n=length(x)-1;
```

```
for i=2:n+1
```

```
    var=[x(i-1) y(i-1)];
```

```
    if param==1
```

```
        dfdx=hitung_T(var,data,TS);
```

```
    else
```

```
        dfdx=fhitung_W(var,data,S,TS);
```

```
    end
```

```
    k1=delz*dfdx;
```

```
    var=[(x(i-1)+delz/2) (y(i-1)+k1/2)];
```

```
    if param==1
```

```
        dfdx=hitung_T(var,data,TS);
```

```
    else
```

```
        dfdx=fhitung_W(var,data,S,TS);
```

```
    end
```

```
    k2=delz*dfdx;
```

```
    var=[(x(i-1)+delz/2) (y(i-1)+k2/2)];
```

```
    if param==1
```

```
        dfdx=hitung_T(var,data,TS);
```

```
    else
```

```
        dfdx=fhitung_W(var,data,S,TS);
```

```
    end
```

```
    k3=delz*dfdx;
```

```
    var=[(x(i-1)+delz) (y(i-1)+k3)];
```

```
    if param==1
```

```
        dfdx=hitung_T(var,data,TS);
```

```
    else
```

```
        dfdx=fhitung_W(var,data,S,TS);
```

```
    end
```

```
    k4=delz*dfdx;
```

```
    y(i)=y(i-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)./6;
```

```
end
```

```
end
```

```

function dTdz=hitung_T(var,data,TS)
z=var(1);
TW=var(2);
SO=data(1);
WO=data(2);
TSO=data(3);
TWO=data(4);
DT=data(5);
TSAT=data(6);
CPS=data(7);
CPW=data(8);
H=data(10);
AREA=data(11);
R=data(12);
P=data(13);
BM=data(14);
dTdz=pi*H*AREA*DT.^2*P*BM*(TS-TW)/(4*CPW*R*SO*TS);
end

```

```

function dWdz=fhitung_W(var,data,S,TS)
z=var(1);
W=var(2);
SO=data(1);
WO=data(2);
DT=data(5);
TSAT=data(6);
CPS=data(7);
CPW=data(8);
ALMD=data(9);
H=data(10);
AREA=data(11);
R=data(12);
P=data(13);
BM=data(14);
dWdz=-pi*H*AREA*DT.^2*P*BM*W*(TS-TSAT)/(4*R*TS*S*(ALMD+CPS*(TS-TSAT)));
end

```

Keluaran program adalah:

<< D A T A >>

Jumlah uap masuk = 14000 kg/jam
Jumlah cairan masuk = 2100 kg/jam
Suhu uap masuk = 640 K
Suhu cairan masuk = 300 K
Diameter pipa = 0.305 m
Suhu jenuh = 443 K
Kapasitas panas uap = 0.5 kkal/kg/K
Kapasitas panas cairan = 1 kkal/kg/K
Panas penguapan cairan pada Tsat = 488 kkal/kg
Koefisien perpindahan panas = 900 kkal/jam/m²/K
Luas permukaan cairan = 60 m²/kg-cairan
Tetapan gas = 0.082 m³.atm/kgmol/K
Tekanan = 8 atm
Berat molekul = 18 kg/kgmol
Interval panjang = 0.02 m
Jumlah interval panjang = 200
Jumlah interval panjang sampai cetak = 10

z (m)	Ts (C)	Tw (C)	Water (kg/hr)
0.000	640.0000	300.0000	2100.000
0.200	625.3848	348.7173	2100.000
0.400	613.5142	388.2859	2100.000
0.600	603.9136	420.2881	2100.000
0.800	596.1586	443.0000	2100.000
1.000	588.7484	443.0000	2007.516
1.200	582.2506	443.0000	1925.410
1.400	576.4886	443.0000	1851.795
1.600	571.3312	443.0000	1785.255
1.800	566.6786	443.0000	1724.690
2.000	562.4527	443.0000	1669.236
2.200	558.5919	443.0000	1618.196
2.400	555.0462	443.0000	1571.003

2.600	551.7751	443.0000	1527.191
2.800	548.7448	443.0000	1486.368
3.000	545.9272	443.0000	1448.205
3.200	543.2988	443.0000	1412.424
3.400	540.8393	443.0000	1378.784
3.600	538.5315	443.0000	1347.079
3.800	536.3606	443.0000	1317.129
4.000	534.3137	443.0000	1288.778

Berikut ini disajikan program dengan menggunakan *toolbox ode45*

```
function Latihan_510
clc
clear all
data=[14000,2100,640,300,0.305,443,0.5,1,488,900,60,0.082,8,18,0.02,200,10];

disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Jumlah uap masuk           = ' num2str(data(1)) ' kg/jam']);
disp(['Jumlah cairan masuk         = ' num2str(data(2)) ' kg/jam']);
disp(['Suhu uap masuk               = ' num2str(data(3)) ' K']);
disp(['Suhu cairan masuk            = ' num2str(data(4)) ' K']);
disp(['Diameter pipa                = ' num2str(data(5)) ' m']);
disp(['Suhu jenuh                   = ' num2str(data(6)) ' K']);
disp(['Kapasitas panas uap          = ' num2str(data(7)) ' kkal/kg/K']);
disp(['Kapasitas panas cairan       = ' num2str(data(8)) ' kkal/kg/K']);
disp(['Panas penguapan cairan pada Tsat = ' num2str(data(9)) ' kkal/kg']);
disp(['Koefisien perpindahan panas   = ' num2str(data(10)) ' kkal/jam/m2/K']);
disp(['Luas permukaan cairan        = ' num2str(data(11)) ' m2/kg-cairan']);
disp(['Tetapan gas                   = ' num2str(data(12)) ' m3.atm/kgmol/K']);
disp(['Tekanan                      = ' num2str(data(13)) ' atm']);
disp(['Berat molekul                 = ' num2str(data(14)) ' kg/kgmol']);
disp(['Interval panjang             = ' num2str(data(15)) ' m']);
disp(['Jumlah interval panjang       = ' num2str(data(16))]);
disp(['Jumlah interval panjang sampai cetak = ' num2str(data(17))]);
disp('-----');
```

```

batasz=data(15)*data(16);
TW=data(4);
kons2=data(2);
disp('-----');
disp(' z (m)    Ts (C)    Tw (C)    Water (kg/hr) ');
disp('-----');
ulang=0;
zakh1=data(15)*data(17);
ZO=0;
WO=data(2);
TSO=data(3);
TWO=data(4);
TSAT=data(6);
Twhit=TWO;
ZZ=1;
TS=TSO;
S=data(1);
fprintf(' %1.3f  %4.4f  %4.4f  %4.3f \n',ZO,TSO,TWO,WO);
while ulang==0;
    zakh=zakh1*ZZ;
    if zakh>batasz
        ulang=1;
    else
        if Twhit<TSAT
            WOO=WO;
            z=[0:data(15):zakh];
            jumz=length(z);
            [zhit,Thit]=ode45(@hitung_T,z,TW,[],data,TS);
            Twhit=Thit(jumz);
            TS=data(3)-data(2)*data(8)*(Thit(jumz)-data(4))/(data(1)*data(7));
            if Twhit>=TSAT
                Zawal=zhit(jumz);
                TSO=TS;
                TWO=TSAT;
                Twhit=TSAT;
            end
        else

```

```

        z=[Zawal:data(15):zakh];
        jumz=length(z);
        [zhit,Whit]=ode45(@hitung_W,z,kons2,[],data,S,TS);
        WOO=Whit(jumz);
        S=data(1)+(data(2)-WOO);
        TS=TSAT-data(9)*(S-data(1))/(data(7)*S)+data(1)*(TSO-TSAT)/S-WO*data(8)*(TSAT-
        TWO)/(S*data(7));
    end
    fprintf(' %1.3f   %4.4f   %4.4f   %4.3f \n',zakh,TS,Twhit,WOO);
    ZZ=ZZ+1;
    ulang=0;
end
end
end

function dTdz=hitung_T(z,TW,data,TS)
SO=data(1);
WO=data(2);
TSO=data(3);
TWO=data(4);
DT=data(5);
TSAT=data(6);
CPS=data(7);
CPW=data(8);
H=data(10);
AREA=data(11);
R=data(12);
P=data(13);
BM=data(14);
dTdz=pi*H*AREA*DT.^2*P*BM*(TS-TW)/(4*CPW*R*SO*TS);
end

function dWdz=hitung_W(z,kons2,data,S,TS)
SO=data(1);
WO=data(2);
W=kons2;
DT=data(5);
TSAT=data(6);
CPS=data(7);
CPW=data(8);
ALMD=data(9);

```

```

H=data(10);
AREA=data(11);
R=data(12);
P=data(13);
BM=data(14);
dWdz=-pi*H*AREA*DT.^2*P*BM*W*(TS-TSAT)/(4*R*TS*S*(ALMD+CPS*(TS-TSAT)));
end

```

Keluaran program adalah:

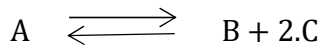
 << D A T A >>

Jumlah uap masuk	= 14000 kg/jam
Jumlah cairan masuk	= 2100 kg/jam
Suhu uap masuk	= 640 K
Suhu cairan masuk	= 300 K
Diameter pipa	= 0.305 m
Suhu jenuh	= 443 K
Kapasitas panas uap	= 0.5 kkal/kg/K
Kapasitas panas cairan	= 1 kkal/kg/K
Panas penguapan cairan pada Tsat	= 488 kkal/kg
Koefisien perpindahan panas	= 900 kkal/jam/m ² /K
Luas permukaan cairan	= 60 m ² /kg-cairan
Tetapan gas	= 0.082 m ³ .atm/kgmol/K
Tekanan	= 8 atm
Berat molekul	= 18 kg/kgmol
Interval panjang	= 0.02 m
Jumlah interval panjang	= 200
Jumlah interval panjang sampai cetak	= 10

z (m)	Ts (C)	Tw (C)	Water (kg/hr)
0.000	640.0000	300.0000	2100.000
0.200	625.3848	348.7173	2100.000
0.400	613.5142	388.2859	2100.000
0.600	603.9136	420.2881	2100.000
0.800	596.1586	443.0000	2100.000
1.000	588.7484	443.0000	2007.516
1.200	582.2506	443.0000	1925.410
1.400	576.4886	443.0000	1851.795
1.600	571.3312	443.0000	1785.255
1.800	566.6786	443.0000	1724.690
2.000	562.4527	443.0000	1669.236
2.200	558.5919	443.0000	1618.196
2.400	555.0462	443.0000	1571.003
2.600	551.7751	443.0000	1527.191
2.800	548.7448	443.0000	1486.368
3.000	545.9272	443.0000	1448.205
3.200	543.2988	443.0000	1412.424
3.400	540.8393	443.0000	1378.784
3.600	538.5315	443.0000	1347.079
3.800	536.3606	443.0000	1317.129
4.000	534.3137	443.0000	1288.778

11. Reaktor Tabung dengan Deaktivasi Katalisator (Kombinasi Runge-Kutta dan Cara Eksplisit)

Reaksi fasa gas eksotermis bolak balik



dijalankan dalam reaktor tabung yang berisi katalisator berupa butir-butir padatan. Diameter dalam tabung D. Tekanan sepanjang reaktor dapat dianggap tetap P. Umpan berjumlah F_0 gmol/waktu dengan komposisi 90% A dan 10% inert(I), bersuhu T_0 . Selama proses, katalisator mengalami deaktivasi sehingga kecepatan reaksi berkurang. Kecepatan reaksi dapat didekati dengan persamaan:

$$r_A \left[\frac{\text{gmol A}}{\text{waktu} \times \text{berat katalisator}} \right] = a \cdot k \left[C_A - \frac{C_B \cdot C_C^2}{K} \right] \quad (5.138)$$

dengan:

$$k = A \cdot \exp \left[-\frac{E}{R.T} \right] \quad (5.139)$$

$$K = \exp \left[\alpha + \frac{\beta}{T} \right] \quad (5.140)$$

a = aktivitas katalisator (pada saat katalisator masih baru, a=1).

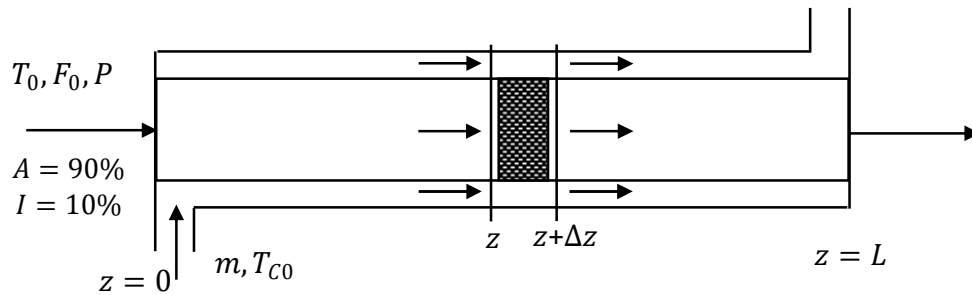
Penurunan aktivitas katalisator dapat didekati dengan persamaan:

$$-\frac{\partial a}{\partial t} = k_d \cdot C_A \quad (5.141)$$

dengan:

$$k_d = A_d \cdot \exp \left[-\frac{E_d}{T} \right] \quad (5.142)$$

Rapat massa katalisator = $\rho_B \frac{\text{berat katalis}}{\text{volum tumpukan}}$. Untuk menjaga agar suhu tidak terlalu tinggi (reaksi eksotermis), pendingin berjumlah m massa/waktu dialirkan diluar tabung (dalam annulus) dengan aliran searah dengan pereaksi (*cocurrent*). Kapasitas panas pendingin Cp_m . Pendingin masuk pada suhu T_{co} dan koefisien perpindahan panas antara pereaksi dan pendingin, dihitung berdasar luas permukaan dalam tabung U . Kapasitas panas gas-gas harganya dianggap tetap. Gas dianggap ideal. Perubahan entalpi reaksi pada suhu standar (T_R) adalah ΔH_R^0 . Ingin dicari konversi A (x), suhu pereaksi (T), suhu pendingin (T_c), dan aktivitas katalisator (a) pada berbagai posisi (z) dan pada berbagai waktu(t).



Gambar 5.13 Skema reaktor tabung

Neraca massa A pada elemen volum (dianggap *quasi steady state*, artinya karena perubahan terhadap waktu sangat lambat (deaktivasi katalisator sangat lambat) maka untuk neraca massa A keadaan dianggap steady (akumulasi = 0)):

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$F_A|_z - F_A|_{z+\Delta z} - \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \Delta z \cdot \rho_B \cdot \bar{r}_A = 0 \quad (5.143)$$

$$\frac{F_A|_{z+\Delta z} - F_A|_z}{\Delta z} = -\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \rho_B \cdot \bar{r}_A \quad (5.144)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, diperoleh:

$$\frac{dF_A}{dz} = -\frac{\pi}{4} D^2 \cdot \rho_B \cdot r_A \quad (5.145)$$

$$\frac{dF_A}{dz} = -\frac{\pi}{4} D^2 \cdot \rho_B \cdot a \cdot k \left[C_A - \frac{C_B \cdot C_C^2}{K} \right] \quad (5.146)$$

Harga F_A , C_A , C_B , C_C selanjutnya dinyatakan dalam konversi A (x).

Stoikhiometri:

Konversi A	A	B	C	I	Total
$x = 0$	$0,9 F_0$	0	0	$0,1 F_0$	F_0
$x = x$	$0,9 F_0 (1-x)$	$0,9 F_0 x$	$1,8 F_0 x$	$0,1 F_0$	$F_0(1+1,8x)$

$$F_A = 0,9 F_0 (1-x) \quad (5.147)$$

$$dF_A = -0,9 F_0 \cdot dx \quad (5.148)$$

Gas ideal:

$$P_A \cdot V = n_A \cdot R \cdot T \quad (5.149)$$

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{RT} \quad (5.150)$$

Menurut hukum Dalton

$$P_A = y_A \cdot P \quad (5.151)$$

sehingga persamaan (5.150) berubah menjadi:

$$C_A = y_A \cdot \frac{P}{RT} \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0,9F_0(1-x)}{F_0(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \\ &= \frac{0,9(1-x)}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \end{aligned} \quad (5.153)$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$C_B = y_B \cdot \frac{P}{RT} = \frac{0,9x}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \quad (5.154)$$

$$C_C = y_C \cdot \frac{P}{RT} = \frac{1,8x}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \quad (5.155)$$

Substitusi persamaan (5.148), (5.153), (5.154), (5.155) ke persamaan (5.146) menghasilkan:

$$-0,9F_0 \frac{dx}{dz} = -\frac{\pi}{4} D^2 \rho_B \cdot a \cdot k \cdot \left[\frac{0,9(1-x)}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} - \frac{1}{K} \frac{0,9x}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \cdot \left[\frac{1,8x}{(1+1,8x)} \right]^2 \cdot \left[\frac{P}{RT} \right]^2 \right] \quad (5.156)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pi D^2 \rho_B \cdot P \cdot a \cdot k}{4F_0 \cdot RT} \left[\frac{(1-x)}{(1+1,8x)} - \frac{3,24}{K} \left[\frac{x}{(1+1,8x)} \right]^3 \left[\frac{P}{RT} \right]^2 \right] \quad (5.157)$$

Neraca panas pereaksi pada elemen volum (entalpi semua unsur stabil pada fase gas pada suhu T_R adalah 0):

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$(\sum (F_i H_i)|_z) - (\sum (F_i H_i)|_{z+\Delta z} + \pi D \cdot \Delta z \cdot U \cdot (\bar{T} - \bar{T}_c)) = 0 \quad (5.158)$$

Dalam hal ini H_i = entalpi gas i tiap gmol dan dipakai juga anggapan *quasi steady-state*.

Panas reaksi sudah termasuk dalam $(\sum F_i H_i)$.

$$\frac{\sum (F_i H_i)|_{z+\Delta z} - \sum (F_i H_i)|_z}{\Delta z} = -\pi D \cdot U \cdot (\bar{T} - \bar{T}_c) \quad (5.159)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{d}{dz} (\sum (F_i H_i)) = -\pi D \cdot U \cdot (T - T_c) \quad (5.160)$$

$$\sum \left[F_i \cdot \frac{dH_i}{dz} \right] + \sum \left[H_i \cdot \frac{dF_i}{dz} \right] = -\pi \cdot D \cdot U \cdot (T - T_c) \quad (5.161)$$

$$\sum \left(F_i \cdot C_{pi} \cdot \frac{dT}{dz} \right) + \left(H_{fA} \cdot \frac{dF_A}{dz} + H_{fB} \cdot \frac{dF_B}{dz} + H_{fC} \cdot \frac{dF_C}{dz} + H_{fI} \cdot \frac{dF_I}{dz} \right) = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.162)$$

$$\sum \left(F_i C_{pi} \frac{dT}{dz} \right) + \left(-H_{fA} \cdot 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} + H_{fB} \cdot 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} + H_{fC} \cdot 1,8 F_0 \frac{dx}{dz} \right) = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.163)$$

$\left(\frac{dF_i}{dz}\right)$ dicari dari persamaan stoikiometri; $\frac{dF_I}{dz} = 0$ karena inert tidak mengalami perubahan jumlah mol).

$$\sum \left(F_i C_{pi} \frac{dT}{dz} \right) + (H_{fB} + 2 H_{fC} - H_{fA}) 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.164)$$

$$\sum \left(F_i C_{pi} \frac{dT}{dz} \right) + (\Delta H_R) 0,9 F_0 \frac{dx}{dz} = -U \cdot \pi \cdot D \cdot (T - T_s) \quad (5.165)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9F_0 \cdot (-\Delta H_R) \cdot \frac{dx}{dz} - \pi \cdot D \cdot U \cdot (T - T_c)}{\sum (F_i C_{pi})} \quad (5.166)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9F_0 \cdot (-\Delta H_R) \cdot \frac{dx}{dz} - \pi \cdot D \cdot U \cdot (T - T_c)}{(0,9F_0(1-x)C_{pA} + 0,9F_0 x C_{pB} + 1,8F_0 x C_{pC} + 0,1F_0 C_{pI})} \quad (5.167)$$

Harga ΔH_R pada suhu T dapat dicari dari ΔH_R^0 (pada suhu T_R) dengan persamaan (lihat teori termodinamika teknik kimia):

$$\Delta H_R = \Delta H_R^0 + (C_{pB} + 2C_{pC} - C_{pA})(T - T_R) \quad (5.168)$$

Persamaan neraca panas (5.167) dapat pula diperoleh dengan penjabaran lain seperti dijelaskan berikut ini.

Neraca panas bereaksi pada elemen volum (entalpi semua gas pada suhu T_R adalah 0):

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$(H|_z) - ((H|_{z+\Delta z}) + \pi D \cdot \Delta z \cdot U \cdot (\bar{T} - \bar{T}_c)) + 0,9F_0 \Delta x \cdot (-\Delta H_R) = 0 \quad (5.169)$$

Dalam hal ini H = entalpi total (panas/waktu). Panas reaksi belum termasuk dalam H , jadi perlu ditambahkan (berbeda dengan cara penjabaran sebelumnya). Perbedaan ini disebabkan karena sistem referensi yang berbeda. Pada cara sebelumnya entalpi semua unsur = 0, sedang pada cara ini entalpi semua bahan (gas) = 0.

$$\frac{H|_{z+\Delta z} - H|_z}{\Delta z} = -\pi D \cdot U \cdot (\bar{T} - \bar{T}_c) + 0,9F_0 \frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot (-\Delta H_R) \quad (5.170)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{dH}{dz} = 0,9F_0 \cdot \frac{dx}{dz} \cdot (-\Delta H_R) - \pi D \cdot U \cdot (T - T_c) \quad (5.171)$$

$$\sum (F_i C_{pi}) \cdot \frac{dT}{dz} = 0,9F_0 \cdot \frac{dx}{dz} \cdot (-\Delta H_R) - \pi D \cdot U \cdot (T - T_c) \quad (5.172)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9F_0 \cdot (-\Delta H_R) \cdot \frac{dx}{dz} - \pi D \cdot U \cdot (T - T_c)}{\sum (F_i \cdot C_{pi})} \quad (5.173)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9F_0 \cdot (-\Delta H_R) \cdot \frac{dx}{dz} - \pi D \cdot U \cdot (T - T_c)}{(0,9F_0(1-x) C p_A + 0,9F_0 x C p_B + 1,8F_0 x C p_C + 0,1F_0 C p_I)} \quad (5.174)$$

Diperoleh persamaan yang sama dengan (5.167).

Neraca panas pendingin pada elemen volum (entalpi pendingin pada suhu T_R adalah nol):

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$(mH|_z + \pi D \Delta z \cdot U(\bar{T} - \bar{T}_c)) - (m \cdot H|_{z+\Delta z}) = 0 \quad (5.175)$$

$$\frac{H_C|_{z+\Delta z} - H_C|_z}{\Delta z} = \frac{\pi D \cdot U}{m} (\bar{T} - \bar{T}_c) \quad (5.176)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, diperoleh:

$$\frac{dH_C}{dz} = \frac{\pi D \cdot U}{m} (T - T_c) \quad (5.177)$$

$$C p_m \frac{dT_c}{dz} = \frac{\pi D \cdot U}{m} (T - T_c) \quad (5.178)$$

$$\frac{dT_c}{dz} = \frac{\pi D \cdot U}{C p_m \cdot m} \cdot (T - T_c) \quad (5.179)$$

Persamaan kecepatan deaktivasi dapat diperoleh berdasarkan persamaan (5.141) dan (5.153) sebagai berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -k_d \cdot \frac{0,9(1-x)}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \quad (5.180)$$

(t= waktu dihitung mulai saat katalisator baru)

Ringkasan persamaan-persamaan yang diperoleh adalah:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pi D^2 \rho_B \cdot P \cdot a \cdot k}{4F_0 \cdot RT} \left[\frac{(1-x)}{(1+1,8x)} - \frac{3,24}{K} \left[\frac{x}{(1+1,8x)} \right]^3 \left[\frac{P}{RT} \right]^2 \right] \quad (5.157)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{0,9F_0 \cdot (-\Delta H_R) \cdot \frac{dx}{dz} - \pi \cdot D \cdot U \cdot (T - T_c)}{(0,9F_0(1-x) C p_A + 0,9F_0 x C p_B + 1,8F_0 x C p_C + 0,1F_0 C p_I)} \quad (5.167)$$

$$\frac{dT_c}{dz} = \frac{\pi D \cdot U}{C p_m \cdot m} \cdot (T - T_c) \quad (5.179)$$

$$k = A \cdot \exp \left[-\frac{E}{R \cdot T} \right] \quad (5.139)$$

$$K = \exp \left[\alpha + \frac{\beta}{T} \right] \quad (5.140)$$

$$\Delta H_R = \Delta H_R^0 + (C p_B + 2C p_C - C p_A)(T - T_R) \quad (5.168)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -k_d \cdot \frac{0,9(1-x)}{(1+1,8x)} \frac{P}{RT} \quad (5.180)$$

$$k_d = A_d \cdot \exp \left[-\frac{E_d}{T} \right] \quad (5.142)$$

Keadaan batas (*boundary conditions*):

$$z = 0; \quad t \geq 0; \quad x = 0; \quad T = T_0; \quad T_c = T_{c0} \quad (5.181)$$

$$z \geq 0; \quad t = 0; \quad a = 1 \quad (5.182)$$

Persamaan-persamaan tersebut diselesaikan secara numeris. Jika harga a pada berbagai posisi pada saat tertentu tersedia maka harga-harga x , T , T_c pada berbagai posisi (z) pada saat tersebut (t_i) dapat dihitung dengan cara Runge-Kutta. Selanjutnya harga a pada waktu berikutnya (t_{i+1}) dihitung berdasarkan persamaan (5.180) dengan pendekatan eksplisit sebagai berikut:

$$a_{j+1} = a_j + \left[\frac{\partial a}{\partial t} \right]_j \cdot \Delta t \quad (5.183)$$

Prosedur pelaksanaan hitungannya adalah sebagai berikut:

1. Berdasar a pada saat awal ($t_0 = 0$), yaitu $a = 1$, dihitung x , T , T_c pada berbagai z pada saat tersebut (metode Runge-Kutta).
2. Berdasar x , T , a pada t_0 , dihitung harga a pada berbagai z pada saat t_1 dengan persamaan (5.183).
3. Berdasarkan harga-harga a pada t_1 dari langkah 2, dihitung x , T , T_c pada saat berbagai z pada saat tersebut.
4. Berdasar x , T , a pada t_1 dihitung harga a pada berbagai z pada saat t_2 dengan persamaan (5.183).
5. Ulangi langkah 3 dan 4 untuk t_2 dan seterusnya.

Program komputer untuk pelaksanaan hitungan untuk data-data $F_0 = 0,9$ gmol/detik; $P = 7$ atm; $D = 10$ cm; panjang reaktor = 400 cm; $U = 0,007$ cal/detik/cm²/K; C_{pA} , C_{pB} C_{pC} dan C_{pI} masing-masing 20, 15, 10, 10 cal/gmol/K; $\Delta H_R^0 = -35000$ cal/gmol; $R = 82$ atm.cm³/gmol.K; $A = 24000$ cm³/detik/g kat; $E/R = 7400$ K; $\alpha = 29,3$; $\beta = 6400$ K; $\rho_B = 3$ g/cm³; $T_R = 273$ K; $m = 140$ g/detik; $C_{pm} = 1$ cal/g/K; $T_0 = 480$ K; $T_{c0} = 470$ K; $A_d = 2E3$ hari⁻¹; $E_d = 2400$ K; jumlah interval panjang = 80; jumlah interval sampai cetak = 5; jumlah interval waktu = 2; interval waktu = 20 hari, adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_511
clc
clear all
data1=[0.9,7,10,400,0.007,20,15,10,10,-35000,82,24000];
data2=[7400,-29.3,6400,3,273,140,1,80,5,2,20];
data3=[0,480,470,2000,2400];
disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Jumlah umpan          = ' num2str(data1(1)) ' gmol/detik']);
disp(['Tekanan                = ' num2str(data1(2)) ' atm']);
disp(['Diameter dalam tabung   = ' num2str(data1(3)) ' cm']);
disp(['Panjang reaktor          = ' num2str(data1(4)) ' cm']);
disp(['Koef. Perpindahan Panas   = ' num2str(data1(5)) ' cal/detik/cm^2/K']);
disp(['Kapasitas Panas A         = ' num2str(data1(6)) ' cal/gmol/K']);
disp(['Kapasitas Panas B         = ' num2str(data1(7)) ' cal/gmol/K']);
disp(['Kapasitas Panas C         = ' num2str(data1(8)) ' cal/gmol/K']);
disp(['Kapasitas Panas I         = ' num2str(data1(9)) ' cal/gmol/K']);
disp(['Perubahan Entalpi reaksi pada TR = ' num2str(data1(10)) ' cal/gmol/K']);
disp(['Tetapan gas               = ' num2str(data1(11)) ' atm.cm^3/gmol/K']);
disp(['Frekwensi Tumbukan        = ' num2str(data1(12)) ' cm^3/detik/g-kat']);
disp(['Tenaga Aktivasi (ER)       = ' num2str(data2(1)) ' K']);
disp(['Tetapan dalam persamaan kesetimbangan = ' num2str(data2(2))]);
disp(['Tetapan dalam persamaan kesetimbangan, K = ' num2str(data2(3)) ' K']);
disp(['Bulk density katalisator   = ' num2str(data2(4)) ' g/cm^3']);
disp(['Suhu referensi             = ' num2str(data2(5)) ' K']);
disp(['Jumlah cairan pendingin     = ' num2str(data2(6)) ' gr/detik']);
disp(['Kapasitas panas pendingin   = ' num2str(data2(7)) ' cal/gr/K']);
disp(['Jumlah interval panjang     = ' num2str(data2(8))]);
disp(['Jumlah interval panjang sampai cetak = ' num2str(data2(9))]);
disp(['Jumlah interval waktu       = ' num2str(data2(10))]);
disp(['Interval waktu (hari)       = ' num2str(data2(11))]);
disp(['Konversi A masuk reaktor    = ' num2str(data3(1))]);
disp(['Suhu gas masuk               = ' num2str(data3(2)) ' K']);
disp(['Suhu pendingin masuk        = ' num2str(data3(3)) ' K']);
disp(['Tetapan persamaan deaktivasi = ' num2str(data3(4)) ' 1/hari']);
disp(['Tetapan persamaan deaktivasi = ' num2str(data3(5)) ' K']);

```

```

FO=data1(1);
P=data1(2);
D=data1(3);
AL=data1(4);
U=data1(5);
CPA=data1(6);
CPB=data1(7);
CPC=data1(8);
CPI=data1(9);
DELHRO=data1(10);
R=data1(11);
AR=data1(12);

ER=data2(1);
ALPH=data2(2);
BETA=data2(3);
RHOB=data2(4);
TR=data2(5);
AM=data2(6);
CPM=data2(7);
NINT=data2(8);
NPRINT=data2(9);
NTIME=data2(10);
DELT=data2(11);

XF=data3(1);
TF=data3(2);
TCF=data3(3);
AD=data3(4);
ED=data3(5);

DELZ=AL*NPRINT/NINT;
ITIME=0;
A=ones((NINT+1),1);
Z=[0:DELZ:AL];
PJGZ=length(Z);
parameter=[AR,ER,ALPH,BETA,DELHRO,CPB,CPC,CPA,CPI,TR,FO,CPM,AM,P,R,D,RHOB,U];

```

```

for I=1:(NTIME+1)
    disp(' ');
    disp(['Waktu = ' num2str((I-1)*DELT) ' hari']);
    disp('-----');
    disp(' Z (cm)      X      T(K)      TC(K)      Akt ');
    disp('-----');
    IZ=1;
    if (I-1)==0
        AIZ=A(IZ);
        XO=XF;
        TO=TF;
        TCO=TCF;
        X(IZ)=XO;
        T(IZ)=TO;
        fprintf(' %4.0f %3.6f %4.4f %4.4f %2.4f \n',Z(1),XO,TO,TCO,AIZ);
        for IZ=2:PJGZ
            kons=[XO,TO,TCO];
            HITUNG_XTOTC=fungsi_hitung(kons,parameter,AIZ,DELZ);
            XO=HITUNG_XTOTC(1);
            TO=HITUNG_XTOTC(2);
            TCO=HITUNG_XTOTC(3);
            X(IZ)=XO;
            T(IZ)=TO;
            fprintf(' %4.0f %3.6f %4.4f %4.4f %2.4f \n',Z(IZ),XO,TO,TCO,AIZ);
        end
        disp('-----');
    else
        A(1)=AIZ;
        for IZ=1:PJGZ
            AKD=AD*exp(-ED/T(IZ));
            RD=-AKD*0.9*(1-X(IZ))*P/((1+1.8*X(IZ))*R*T(IZ));
            ANEW(IZ)=A(IZ)+RD*DELT;
        end
        AIZ=ANEW(1);
        XO=XF;
        TO=TF;
        TCO=TCF;
        X(IZ)=XO;
        T(IZ)=TO;
        fprintf(' %4.0f %3.6f %4.4f %4.4f %2.4f \n',Z(1),XO,TO,TCO,AIZ);
    end
end

```

```

    for IZ=2:PJGZ
        AIZ=ANEW(IZ);
        kons=[XO,TO,TCO];
        HITUNG_XTOTC=funksi_hitung(kons,parameter,AIZ,DELZ);
        XO=HITUNG_XTOTC(1);
        TO=HITUNG_XTOTC(2);
        TCO=HITUNG_XTOTC(3);
        X(IZ)=XO;
        T(IZ)=TO;
        fprintf(' %4.0f %3.6f %4.4f %4.4f %2.4f \n',Z(IZ),XO,TO,TCO,AIZ);
    end
    disp('-----');
    AIZ=ANEW(1);
    A=ANEW;
end
end
end

function HITUNG_XTOTC=funksi_hitung(kons,parameter,AIZ,DELZ)
X=kons(1);
T=kons(2);
TC=kons(3);
XO=X;
TO=T;
TCO=TC;

HITUNG_DFDZ=funksi_hitungdfdZ(X,T,TC,parameter,AIZ);
FX=HITUNG_DFDZ(1);
FT=HITUNG_DFDZ(2);
FTC=HITUNG_DFDZ(3);
KX1=FX*DELZ;
KT1=FT*DELZ;
KTC1=FTC*DELZ;

X=XO+KX1/2;
T=TO+KT1/2;
TC=TCO+KTC1/2;
HITUNG_DFDZ=funksi_hitungdfdZ(X,T,TC,parameter,AIZ);
FX=HITUNG_DFDZ(1);
FT=HITUNG_DFDZ(2);

```

```

FTC=HITUNG_DFDZ(3);
KX2=FX*DELZ;
KT2=FT*DELZ;
KTC2=FTC*DELZ;

X=X0+KX2/2;
T=TO+KT2/2;
TC=TCO+KTC2/2;
HITUNG_DFDZ=fungsi_hitungdfdZ(X,T,TC,parameter,AIZ);
FX=HITUNG_DFDZ(1);
FT=HITUNG_DFDZ(2);
FTC=HITUNG_DFDZ(3);
KX3=FX*DELZ;
KT3=FT*DELZ;
KTC3=FTC*DELZ;

X=X0+KX3;
T=TO+KT3;
TC=TCO+KTC3;
HITUNG_DFDZ=fungsi_hitungdfdZ(X,T,TC,parameter,AIZ);
FX=HITUNG_DFDZ(1);
FT=HITUNG_DFDZ(2);
FTC=HITUNG_DFDZ(3);
KX4=FX*DELZ;
KT4=FT*DELZ;
KTC4=FTC*DELZ;

X0=X0+(KX1+2*KX2+2*KX3+KX4)/6;
TO=TO+(KT1+2*KT2+2*KT3+KT4)/6;
TCO=TCO+(KTC1+2*KTC2+2*KTC3+KTC4)/6;

HITUNG_XTOTC=[X0;TO;TCO];
end

function HITUNG_DFDZ=fungsi_hitungdfdZ(X,T,TC,parameter,AIZ)
AR=parameter(1);
ER=parameter(2);
ALPH=parameter(3);
BETA=parameter(4);
DELHRO=parameter(5);

```



```

CPB=parameter(6);
CPC=parameter(7);
CPA=parameter(8);
CPI=parameter(9);
TR=parameter(10);
FO=parameter(11);
CPM=parameter(12);
AM=parameter(13);
P=parameter(14);
R=parameter(15);
D=parameter(16);
RHOB=parameter(17);
U=parameter(18);

AKR=AR*exp(-ER/T);
AKS=exp(ALPH+BETA/T);
DELHR=DELHRO+(CPB+2*CPC-CPA)*(T-TR);
FX=(1-X)/(1+1.8*X)-(3.24/AKS)*(X/(1+1.8*X)).^3*(P/(R*T).^2);
FT=0.9*FO*(1-X)*CPA+0.9*FO*X*CPB+1.8*FO*X*CPC+0.1*FO*CPI;
dXdZ=pi*D.^2*RHOB*P*AIZ*AKR*FX/(4*FO*R*T);
dTdZ=(0.9*FO*(-DELHR)*dXdZ-pi*D*U*(T-TC))/FT;
dTCdZ=pi*D*U*(T-TC)/(AM*CPM);
HITUNG_DFDZ=[dXdZ;dTdZ;dTCdZ];
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

<< D A T A >>	
Jumlah umpan	= 0.9 gmol/detik
Tekanan	= 7 atm
Diameter dalam tabung	= 10 cm
Panjang reaktor	= 400 cm
Koef. Perpindahan Panas	= 0.007 cal/detik/cm ² /K
Kapasitas Panas A	= 20 cal/gmol/K
Kapasitas Panas B	= 15 cal/gmol/K
Kapasitas Panas C	= 10 cal/gmol/K
Kapasitas Panas I	= 10 cal/gmol/K
Perubahan Entalpi reaksi pada TR	= -35000 cal/gmol/K
Tetapan gas	= 82 atm.cm ³ /gmol/K
Frekwensi Tumbukan	= 24000 cm ³ /detik/g-kat
Tenaga Aktivasi (ER)	= 7400 K
Tetapan dalam persamaan kesetimbangan	= -29.3
Tetapan dalam persamaan kesetimbangan, K	= 6400 K
Bulk density katalisator	= 3 g/cm ³
Suhu referensi	= 273 K
Jumlah cairan pendingin	= 140 gr/detik
Kapasitas panas pendingin	= 1 cal/gr/K
Jumlah interval panjang	= 80
Jumlah interval panjang sampai cetak	= 5
Jumlah interval waktu	= 2
Interval waktu (hari)	= 20
Konversi A masuk reaktor	= 0
Suhu gas masuk	= 480 K
Suhu pendingin masuk	= 470 K
Tetapan persamaan deaktivasi	= 2000 1/hari
Tetapan persamaan deaktivasi	= 2400 K

Waktu = 0 hari

Z (cm)	X	T(K)	TC(K)	Akt
0	0.000000	480.0000	470.0000	1.0000
25	0.006041	485.1294	470.4855	1.0000
50	0.012913	490.0425	471.1450	1.0000
75	0.020661	494.8936	471.9668	1.0000
100	0.029351	499.8222	472.9447	1.0000
125	0.039087	504.9682	474.0785	1.0000
150	0.050017	510.4889	475.3735	1.0000
175	0.062360	516.5803	476.8416	1.0000
200	0.076443	523.5124	478.5030	1.0000
225	0.092774	531.6928	480.3899	1.0000
250	0.112193	541.7982	482.5536	1.0000
275	0.136224	555.0864	485.0792	1.0000
300	0.168049	574.2794	488.1204	1.0000
325	0.216056	606.8224	492.0008	1.0000
350	0.313978	682.8377	497.6259	1.0000
375	0.451270	766.6774	508.0596	1.0000
400	0.458816	721.6951	518.2601	1.0000

Waktu = 20 hari

Z (cm)	X	T(K)	TC(K)	Akt
0	0.000000	480.0000	470.0000	0.9569
25	0.005742	484.7422	470.4780	0.9558
50	0.012199	489.2240	471.1148	0.9548
75	0.019389	493.5777	471.8967	0.9541
100	0.027346	497.9154	472.8156	0.9534
125	0.036124	502.3398	473.8674	0.9529
150	0.045801	506.9545	475.0525	0.9523
175	0.056491	511.8735	476.3751	0.9519
200	0.068350	517.2339	477.8443	0.9513
225	0.081605	523.2145	479.4747	0.9508
250	0.096585	530.0656	481.2885	0.9501
275	0.113785	538.1632	483.3188	0.9491
300	0.134004	548.1169	485.6162	0.9477
325	0.158612	561.0041	488.2604	0.9452
350	0.190279	578.9905	491.3874	0.9413
375	0.236097	608.2562	495.2742	0.9470
400	0.319542	669.0487	500.6277	0.9546

Waktu = 40 hari

Z (cm)	X	T(K)	TC(K)	Akt
0	0.000000	480.0000	470.0000	0.9137
25	0.005448	484.3601	470.4707	0.9116
50	0.011504	488.4281	471.0851	0.9099
75	0.018169	492.3197	471.8287	0.9085
100	0.025455	496.1282	472.6917	0.9073
125	0.033383	499.9335	473.6678	0.9063
150	0.041991	503.8083	474.7540	0.9054
175	0.051332	507.8240	475.9501	0.9046
200	0.061479	512.0559	477.2587	0.9037
225	0.072532	516.5891	478.6853	0.9029
250	0.084624	521.5256	480.2391	0.9019
275	0.097934	526.9943	481.9329	0.9005
300	0.112708	533.1641	483.7850	0.8986
325	0.129282	540.2618	485.8203	0.8955
350	0.148130	548.6074	488.0733	0.8906
375	0.170329	559.1088	490.5998	0.8946
400	0.197603	573.1086	493.4955	0.8997

12. Reaksi Gas-Cair dalam Tangki Berpengaduk

Reaksi gas cair

$A \text{ (gas)} + B \text{ (larutan)} \rightarrow \text{hasil larutan}$

dijalankan dalam tangki berpengaduk yang bekerja secara *batch*. Mula-mula tangki diisi larutan B sebanyak V liter dengan konsentrasi C_{B0} gmol/liter. Mulai suatu saat, gas A murni dengan tekanan P_A digelembungkan dari dasar tangki. Terjadi dua proses yang berlangsung seri, yaitu transfer massa A dari fasa gas ke cairan (pelarut) dan reaksi fasa cair antara A terlarut dengan B terlarut. Kecepatan transfer massa A dari gas ke cairan mengikuti persamaan:

$$N_A = k_c a (C_A^* - C_A) \quad (5.184)$$

Dalam hal ini:

N_A = kecepatan transfer massa A (gmol A/waktu/volum cairan)

$k_c a$ = koefisien transfer massa A volumetris

C_A^* = konsentrasi A dalam cairan yang setimbang dengan gas A_c (gmol A/volum)

C_A = konsentrasi A dalam cairan (gmol A/volum)

Hubungan kesetimbangan uap-cair mengikuti persamaan

$$P_A = H_A \cdot C_A^* \quad (5.185)$$

dengan H_A = tetapan Henry

Kecepatan reaksi fasa cair antara A dan B dapat didekati dengan persamaan

$$r_A = k_r \cdot C_A C_B \quad (5.186)$$

dengan:

r_A = kecepatan reaksi A (gmol A/waktu/volum cairan)

C_B = konsentrasi B dalam cairan (gmol/volum)

Proses berlangsung isotermis dan volum cairan dapat dianggap tetap.

- Ingin disusun model matematis yang bisa dipakai untuk mencari konsentrasi A dan B dalam larutan pada berbagai waktu.
- Ingin disusun model matematis yang bisa dipakai untuk mencari konsentrasi B dalam larutan pada berbagai waktu, untuk kasus dimana transfer massa A dari gas ke cairan berlangsung sangat cepat dibandingkan dengan reaksi kimianya, sehingga kecepatan proses keseluruhan dikontrol oleh reaksi kimia (proses yang lambat). Akan dibandingkan pula hasil hitungan dengan model pada a dan b.

- c. Ingin disusun model matematis untuk mencari konsentrasi B dalam larutan pada berbagai waktu, untuk kasus dimana reaksi kimia berlangsung sangat cepat dibandingkan dengan transfer massa A dari gas ke cairan, sehingga kecepatan proses keseluruhan dikontrol oleh transfer massanya. Akan dibandingkan pula hasil hitungan dengan model pada a dan pada c.
- d. Jika tersedia data C_B pada berbagai waktu, bagaimana cara evaluasi harga k_{ca} dan k_r ?

a. Transfer Massa dan Reaksi Kimia mengontrol (*Mixed Regime*)

Neraca massa A pada fasa cair:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$k_c a. (C_A^* - C_A). V - 0 - k_r. C_A. C_B. V = \frac{d}{dt} (V. C_A) \quad (5.187)$$

Karena V (volum cairan) dianggap tetap, maka persamaan (5.187) berubah menjadi:

$$\frac{dC_A}{dt} = k_c a. (C_A^* - C_A) - k_r. C_A. C_B \quad (5.188)$$

Hubungan kesetimbangan diperoleh dari persamaan (5.185), sebagai berikut:

$$C_A^* = \frac{P_A}{H_A} \quad (5.189)$$

Neraca massa B pada fasa cair:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$0 - 0 - k_r C_A C_B. V = \frac{d}{dt} (V. C_B) \quad (5.190)$$

Karena harga V tetap, maka persamaan (5.190) berubah menjadi:

$$\frac{dC_B}{dt} = k_r. C_A C_B \quad (5.191)$$

Keadaan batas untuk peristiwa ini adalah:

$$t = 0; \quad C_A = 0; \quad C_B = C_{B0} \quad (5.192)$$

Persamaan (5.188) dan (5.191) adalah persamaan diferensial ordiner simultan order satu yang bisa diselesaikan secara numeris dengan cara Runge-Kutta, misalnya. Dalam hal ini diperlukan persamaan pembantu (5.189).

Program komputer untuk $C_{B0} = 2 \text{ gmol/L}$; $P_A = 5 \text{ atm}$; $H_A = 20 \text{ atm.L/gmol}$; $k_{ca} = 0,4$; $k_r = 0,5 \text{ L/gmol/menit}$; interval waktu $\Delta t = 0,1$; jumlah interval waktu = 400; jumlah interval waktu sampai cetak = 10 adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_512aa
clc
clear all
data=[5,0,2,20,0.4,0.5,1,40];
disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Tekanan gas A          = ' num2str(data(1)) ' atm']);
disp(['Konsentrasi A mula-mula      = ' num2str(data(2)) ' gmol/L']);
disp(['Konsentrasi B mula-mula      = ' num2str(data(3)) ' gmol/L']);
disp(['Tetapan Henry          = ' num2str(data(4)) ' atm.L/gmol']);
disp(['Koefisien transfer massa volumetris = ' num2str(data(5)) ' 1/menit']);
disp(['Tetapan kecepatan reaksi      = ' num2str(data(6)) ' 1/menit']);
disp(['Interval waktu reaksi        = ' num2str(data(7)) ' menit']);
disp(['Lama waktu reaksi            = ' num2str(data(8)) ' menit']);

PA=data(1);
CA0=data(2);
CBO=data(3);
HA=data(4);
AKCA=data(5);
AKR=data(6);
DELT=data(7);
WAKTU=data(8);
kons=[CA0;CBO];
t=[0:DELT:WAKTU];
pjgt=length(t);
parameter=[PA,HA,AKCA,AKR];
disp(' ');
disp('-----');
disp(' t (menit)    CA (gmol/L)    CB (gmol/L) ');
disp('-----');

Chit=hitung_ode(t,kons,parameter,DELT);
CAHIT=Chit(1,:);
CBHIT=Chit(2,:);
for i=1:pjgt
    fprintf(' %2.0f          %2.6f          %2.6f\n',t(i),CAHIT(i),CBHIT(i));
end
disp('-----');
end

```



```

function Chitung=hitung_ode(t,kons,parameter,DELTA)
nx=length(t);
y(1)=kons(1);
z(1)=kons(2);
for i=2:(nx+1)
    var=[t(i-1), y(i-1), z(i-1)];
    dCdthit=fungsi_pd(var,parameter);
    k1=DELTA*dCdthit(1);
    m1=DELTA*dCdthit(2);
    var=[(t(i-1)+DELTA/2), (y(i-1)+k1/2), (z(i-1)+m1/2)];
    dCdthit=fungsi_pd(var,parameter);
    k2=DELTA*dCdthit(1);
    m2=DELTA*dCdthit(2);
    var=[(t(i-1)+DELTA/2), (y(i-1)+k2/2), (z(i-1)+m2/2)];
    dCdthit=fungsi_pd(var,parameter);
    k3=DELTA*dCdthit(1);
    m3=DELTA*dCdthit(2);
    var=[(t(i-1)+DELTA), (y(i-1)+k3), (z(i-1)+m3)];
    dCdthit=fungsi_pd(var,parameter);
    k4=DELTA*dCdthit(1);
    m4=DELTA*dCdthit(2);
    y(i)=y(i-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    z(i)=z(i-1)+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6;
end
Chitung=[y;z];
end

```

```

function dCdt=fungsi_pd(var,parameter)
CA=var(2);
CB=var(3);
PA=parameter(1);
HA=parameter(2);
AKCA=parameter(3);
AKR=parameter(4);

CAS=PA/HA;
dCAdt=AKCA*(CAS-CA)-AKR*CA*CB;
dCBdt=-AKR*CA*CB;
dCdt=[dCAdt; dCBdt];
end

```


26	0.141202	0.559799
27	0.145234	0.521116
28	0.149329	0.484121
29	0.153476	0.448826
30	0.157662	0.415239
31	0.161876	0.383359
32	0.166102	0.353180
33	0.170327	0.324690
34	0.174534	0.297869
35	0.178707	0.272692
36	0.182831	0.249125
37	0.186890	0.227130
38	0.190867	0.206661
39	0.194747	0.187668
40	0.198517	0.170094

b. Reaksi Kimia Mengontrol

Jika reaksi kimia berlangsung sangat lambat dibanding transfer massanya, maka konsentrasi A dalam larutan dapat dianggap selalu dekat dengan konsentrasi jenuh (C_A^*). Atau dengan perkataan lain selalu tercapai keadaan setimbang antara A di fasa cair dan A di fasa gas. Karena harga C_A selalu sama dengan C_A^* maka persamaan untuk A (neraca A) tidak perlu ditinjau. Disusun neraca massa B dalam fasa cair:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$0 - 0 - k_r \cdot C_A C_B \cdot V = \frac{d}{dt}(V \cdot C_B) \quad (5.193)$$

Karena harga V tetap, maka persamaan (5.193) berubah menjadi:

$$\frac{dC_B}{dt} = -k_r \cdot C_A C_B \quad (5.194)$$

Karena harga $C_A = C_A^* = P_A/H_A$, maka

$$\frac{dC_B}{dt} = -\frac{k_r \cdot P_A}{H_A} C_B \quad (5.195)$$

$$\int_{C_{B0}}^{C_B} (dC_B/C_B) = -\frac{k_r \cdot P_A}{H_A} \int_0^t dt \quad (5.196)$$

Diperoleh persamaan:

$$C_B = C_{B0} \cdot \exp \left[-\frac{k_r \cdot P_A}{H_A} t \right] \quad (5.197)$$

Jika diambil $k_r = 0,01$; $C_{B0} = 0,2$; $P_A = 5$; $H_A = 20$; $k_{ca} = 0,4$; diperoleh:

$$C_B = 2 \exp(-0,0025t) \quad (5.198)$$

Hasil hitungan:

t , menit	C_B , gmol/L
0	0,2
40	0,181
80	0,164
120	0,148
160	0,134
200	0,121
240	0,110
280	0,099
320	0,090
360	0,081
400	0,074

Peristiwa ini juga bisa didekati dengan model pada a (*mixed regime*) karena kasus ini adalah kasus khusus dari model pada a. Sebagai perbandingan hasil ditunjukkan hasil hitungan dengan model pada a menggunakan program komputer dimuka ($\Delta t = 0,1$ menit; interval waktu sampai cetak = 400) sebagai berikut:

Hasil Perhitungan:

<< D A T A >>		
Tekanan gas A	= 5 atm	
Konsentrasi A mula-mula	= 0 gmol/L	
Konsentrasi B mula-mula	= 0.2 gmol/L	
Tetapan Henry	= 20 atm.L/gmol	
Koefisien transfer massa volumetris	= 0.4 1/menit	
Tetapan kecepatan reaksi	= 0.01 1/menit	
Interval waktu reaksi	= 40 menit	
Lama waktu reaksi	= 400 menit	
t (menit)	CA (gmol/L)	CB (gmol/L)
0	0.000000	0.200000
40	0.248859	0.182178
80	0.248967	0.164913
120	0.249065	0.149278
160	0.249153	0.135121
200	0.249233	0.122302
240	0.249306	0.110695
280	0.249371	0.100188
320	0.249431	0.090675
360	0.249485	0.082064
400	0.249534	0.074269

Terlihat bahwa harga-harga C_B yang diperoleh dengan dua cara pendekatan tersebut hampir sama. Juga terlihat bahwa harga C_A dengan model *mixed regime* dan *chemical regime* di sini cocok (mendekati konstan yaitu konsentrasi A jenuh, C_A^*). Harga $k_{ca} = 0,4$ dan $k_r = 0,01$ menyebabkan reaksi kimia mengontrol.

c. Transfer Massa mengontrol (*Physical Regime*)

Karena reaksi kimia berlangsung sangat cepat dibanding transfer massa, maka A yang masuk ke cairan segera bereaksi dengan B, sehingga harga konsentrasi A dalam cairan (C_A) dapat dianggap mendekati nol. Persamaan matematis untuk reaksi kimia tidak perlu ditinjau karena kecepatan reaksi kimia dikontrol oleh transfer massa A. Kecepatan reaksi selalu menyesuaikan (sama) dengan kecepatan transfer massa. Neraca B dalam larutan:

$$\text{Rate of Input} - \text{Rate of Output} = \text{Rate of Accumulation}$$

$$0 - 0 - k_c a. (C_A^* - C_A). V = \frac{d}{dt} (V. C_B) \quad (5.199)$$

Karena harga V tetap, maka diperoleh:

$$\frac{dC_B}{dt} = -k_c a. (C_A^* - C_A) \quad (5.200)$$

Harga $C_A^* = P_A/H_A$ dan $C_A \approx 0$, sehingga persamaan (5.200) berubah menjadi:

$$\frac{dC_B}{dt} = -\frac{k_c a. P_A}{H_A} \quad (5.201)$$

Integrasi persamaan (5.201) menghasilkan:

$$C_B = -\frac{k_c a. P_A}{H_A} t + \text{tetapan} \quad (5.202)$$

Karena pada $t = 0$ harga $C_B = C_{B0}$, maka harga tetapan = C_{B0} , sehingga diperoleh persamaan:

$$C_B = C_{B0} - \frac{k_c a. P_A}{H_A} t \quad (5.203)$$

Sebagai contoh hitungan diambil $k_{ca} = 0,01$; $k_r = 0,5$; $C_{B0} = 2$; $H_A = 20$ (dipilih $k_{ca} = 0,01$ dan $k_r = 0,5$ agar transfer massa mengontrol). Persamaan (5.203) berubah menjadi:

$$C_B = 2 - 0,0025. t$$

Hasil hitungan:

t , menit	C_B , gmol/L
0	2,0
40	1,90
80	1,80
120	1,70
160	1,60
200	1,50
240	1,40
280	1,30
320	1,20
360	1,10
400	1,00

Peristiwa ini jika dihitung dengan model *mixed regime* memberikan hasil ($\Delta t = 0,1$ menit; interval waktu sampai cetak = 400) sebagai berikut:

Hasil Perhitungan:

<< D A T A >>	
Tekanan gas A	= 5 atm
Konsentrasi A mula-mula	= 0 gmol/L
Konsentrasi B mula-mula	= 2 gmol/L
Tetapan Henry	= 20 atm.L/gmol
Koefisien transfer massa volumetris	= 0.01 1/menit
Tetapan kecepatan reaksi	= 0.5 1/menit
Interval waktu reaksi	= 40 menit
Lama waktu reaksi	= 400 menit

t (menit)	CA (gmol/L)	CB (gmol/L)
0	0.000000	2.000000
40	0.002596	1.903584
80	0.002736	1.804790
120	0.002892	1.706071
160	0.003067	1.607437
200	0.003263	1.508899
240	0.003487	1.410471
280	0.003743	1.312172
320	0.004039	1.214023
360	0.004385	1.116052
400	0.004794	1.018294

Terlihat bahwa hasil hitungan dengan dua pendekatan tersebut cukup dekat. Terlihat pula pada hasil perhitungan dengan *mixed regime* bahwa $C_A \approx 0$.

Komentar:

Contoh peristiwa transfer massa dan reaksi kimia ini menunjukkan bahwa jika ada proses yang berlangsung seri, maka kecepatan proses secara keseluruhan ditentukan (dikontrol) oleh proses yang relatif sangat lambat. Untuk kasus transfer massa dan reaksi kimia ini, ada 3 keadaan yaitu *mixed regime* (kedua proses mengontrol), *chemical regime* (reaksi kimia mengontrol), dan *physical regime* (transfer massa mengontrol). Salah satu contoh dari studi yang mempelajari batas-batas regime tersebut adalah tesis program S₂ Teknik Kimia UGM oleh Sumarni, dengan judul *Peninjauan Penahanan Difusi dan Penahanan Konversi pada proses Absorpsi Gas yang diikuti Reaksi dalam Tangki berpengaduk* (1992). Pengetahuan tentang batas-batas regime tersebut sangat bermanfaat, karena jika diketahui bahwa peristiwa yang ditinjau berada pada daerah *regime* yang murni (hanya satu proses yang mengontrol) maka bisa dipakai pendekatan matematis yang lebih sederhana (seperti contoh disini).

Perancangan alat juga bisa dijalankan dengan jauh lebih mudah, jika kondisi alat dibuat berada pada *regime* yang murni.

d. Evaluasi Harga k_{ca} dan k_r jika Tersedia Data C_B pada Berbagai Waktu

Misal suatu percobaan dengan $C_{A0} = 0$ gmol/liter; $C_{B0} = 2$ gmol/liter; $P_A = 5$ dan $H_A = 20$ menghasilkan data C_B pada berbagai waktu sebagai berikut:

t , menit	C_B , gmol/L
0	2,0
5	1,80
10	1,58
15	1,36
20	1,15
25	0,95
30	0,76
35	0,59
40	0,44

Ingin cari harga k_{ca} dan k_r berdasar pada percobaan tersebut dan akan dibandingkan harga C_B pada berbagai waktu hasil perhitungan memakai k_{ca} dan k_r yang diperoleh tersebut dengan harga C_B hasil percobaan (untuk mengecek kesesuaian model matematis yang diajukan).

Jika harga k_{ca} dan k_r ditentukan, maka berdasar persamaan (5.188), (5.189), (5.191) dapat dihitung harga C_B pada berbagai waktu, seperti pada a. Dicoba berbagai harga k_{ca} dan k_r sampai diperoleh harga C_B pada berbagai waktu yang dekat dengan C_B dari data percobaan. Secara lebih eksak, dicari harga k_{ca} dan k_r yang memberikan SSE yang minimal.

$$SSE = \sum ((C_B)_{hitung} - (C_B)_{data})^2 = f(k_{ca}, k_r) \quad (5.205)$$

Dijumpai minimasi SSE dengan dua variabel (k_{ca} dan k_r) yang bisa diselesaikan dengan cara Hooke-Jeeves, misalnya. Untuk melaksanakan hitungan, disusun program komputer dengan skema sebagai berikut:

1. Program pokok: Minimasi Hooke-Jeeves

$$SSE = f(k_{ca}, k_r)$$

2. *Subroutine:*

Input k_{ca} dan k_r , output SSE

Isi: Runge-Kutta dan perhitungan SSE .

Program komputer untuk pelaksanaan hitungan adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_512ddd
clc
clear all
data=[5,0,2,20,0.35,0.72,5,40];
CBdata=[2,1.8,1.58,1.36,1.15,0.95,0.76,0.59,0.44];
disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Tekanan gas A          = ' num2str(data(1)) ' atm']);
disp(['Konsentrasi A mula-mula    = ' num2str(data(2)) ' gmol/L']);
disp(['Konsentrasi B mula-mula    = ' num2str(data(3)) ' gmol/L']);
disp(['Tetapan Henry              = ' num2str(data(4)) ' atm.L/gmol']);
disp(['Koefisien transfer massa volumetris = ' num2str(data(5)) ' 1/menit']);
disp(['Tetapan kecepatan reaksi      = ' num2str(data(6)) ' 1/menit']);
disp(['Interval waktu reaksi        = ' num2str(data(7)) ' menit']);
disp(['Lama waktu reaksi            = ' num2str(data(8)) ' menit']);

PA=data(1);
CAO=data(2);
CBO=data(3);
HA=data(4);
AKCA=data(5);
AKR=data(6);
DELT=data(7);
WAKTU=data(8);
t=[0:DELT:WAKTU];
tx=[0:0.1:WAKTU];
CBdatax=spline(t,CBdata,tx);
pjgt=length(t);
```

```

kons=[CAO;CBO];
parameter=[AKCA,AKR];
tetapan=[PA,HA];
delxrasio=[0.1,0.1,0.6,0.01,0.01];

disp('-----');
disp('  akca    akr    SSE  ');
disp('-----');
fxopt=proses_optimasi(tx,kons,parameter,tetapan,delxrasio,CBdatax);
disp('-----');
VAROPT=[fxopt(1),fxopt(2)];
[t,Chit]=ode45(@fungsi_pd,t,kons,[],VAROPT,tetapan);
CAHIT=Chit(:,1);
CBHIT=Chit(:,2);
disp(' ');
disp('-----');
disp(' t (menit)  CB (data)  CB (hitung)  Ralat  ');
disp('-----');

for i=1:pgt
    ralat=abs((CBdata(i)-CBHIT(i))./CBdata(i);
    fprintf(' %2.0f    %2.2f    %2.4f    %2.5f \n',t(i),CBdata(i),CBHIT(i),ralat);
end
disp('-----');
disp('      << Hasil Optimasi >>      ');
disp('-----');
disp(['kcA  = ' num2str(fxopt(1))]);
disp(['kr   = ' num2str(fxopt(2))]);
disp(['SSE  = ' num2str(fxopt(3))]);
disp('-----');
end

function foptimasi=proses_optimasi(tx,kons,parameter,tetapan,delxrasio,CBdatax)
DELXA=delxrasio(1);
DELXB=delxrasio(2);
RASIO=delxrasio(3);
TOLXA=delxrasio(4);
TOLXB=delxrasio(5);
x1opt=parameter(1);
x2opt=parameter(2);
VAROPT=[x1opt,x2opt];
SSE_OPT=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
fprintf(' %1.6f  %6.2f  %1.6f \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);

```

```

ulang1=1;
while ulang1==1
    tanda1=0;
    tanda2=0;
    x1=x1opt+DELXA;
    x2=x2opt;
    VAROPT=[x1,x2];
    FSSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
    if FSSE>=SSE_OPT
        x1=x1opt-DELXA;
        VAROPT=[x1,x2];
        FSSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
        if FSSE<SSE_OPT
            SSE_OPT=FSSE;
            x1opt=x1;
            tanda1=-1;
            fprintf(' %1.6f %6.2f %1.6f \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
        end
    else
        SSE_OPT=FSSE;
        x1opt=x1;
        tanda1=1;
        fprintf(' %1.6f %6.2f %1.6f \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
    end
    x1=x1opt;
    x2=x2opt+DELXB;
    VAROPT=[x1,x2];
    FSSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
    if FSSE>=SSE_OPT
        x2=x2opt-DELXB;
        VAROPT=[x1,x2];
        FSSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
        if FSSE<SSE_OPT
            SSE_OPT=FSSE;
            x2opt=x2;
            tanda2=-1;
            fprintf(' %1.6f %6.2f %1.6f \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
        end
    else
        SSE_OPT=FSSE;
        x2opt=x2;
        tanda2=1;
    end
end

```

```

    fprintf(' %1.6f  %6.2f  %1.6f \n',x1opt,x2opt,SSE_OPT);
end
if abs(tanda1)>0.2 || abs(tanda2)>0.2
    ulang2=1;
    while ulang2==1
        x1=x1opt+DELXA*tanda1;
        x2=x2opt+DELXB*tanda2;
        VAROPT=[x1,x2];
        FSSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
        if FSSE>=SSE_OPT
            ulang2=0;
        else
            x1opt=x1;
            x2opt=x2;
            SSE_OPT=FSSE;
        end
    end
else
    if (DELXA<TOLXA) && (DELXB<TOLXB)
        VAROPT=[x1opt,x2opt];
        FSSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax);
        foptimasi=[x1opt,x2opt,FSSE];
        break;
    else
        DELXA=RASIO*DELXA;
        DELXB=RASIO*DELXB;
    end
end
end
end
end

function SSE=hit_SSE(tx,kons,VAROPT,tetapan,CBdatax)
[t,Chit]=ode45(@fungsi_pd,tx,kons,[],VAROPT,tetapan);
n=length(t);
CBhit=Chit(:,2);
for i=1:n
    jumB(i)=((CBdatax(i)-CBhit(i))/CBdatax(i))^2;
end
SSE=sum(jumB);
end

```

```

function dCdt=fungsi_pd(t,kons,VAROPT,tetapan)
CA=kons(1);
CB=kons(2);
PA=tetapan(1);
HA=tetapan(2);
AKCA=VAROPT(1);
AKR=VAROPT(2);

CAS=PA/HA;
dCAdt=AKCA*(CAS-CA)-AKR*CA*CB;
dCBdt=-AKR*CA*CB;
dCdt=[dCAdt; dCBdt];
end

```

Hasil perhitungan:

<< D A T A >>

```

Tekanan gas A          = 5 atm
Konsentrasi A mula-mula = 0 gmol/L
Konsentrasi B mula-mula = 2 gmol/L
Tetapan Henry          = 20 atm.L/gmol
Koefisien transfer massa volumetris = 0.35 1/menit
Tetapan kecepatan reaksi = 0.72 1/menit
Interval waktu reaksi   = 5 menit
Lama waktu reaksi       = 40 menit

```

akca	akr	SSE
0.350000	0.72	66.386558
0.250000	0.72	9.285873
0.250000	0.62	4.437403
0.250000	0.52	0.869075
0.250000	0.48	0.152247
0.250000	0.44	0.070129
0.250000	0.47	0.045069
0.250000	0.45	0.031189

0.250000	0.46	0.029594	

t (menit)	CB (data)	CB (hitung)	Ralat

0	2.00	2.0000	0.00000
5	1.80	1.8011	0.00061
10	1.58	1.5695	0.00664
15	1.36	1.3471	0.00947
20	1.15	1.1358	0.01239
25	0.95	0.9374	0.01323
30	0.76	0.7546	0.00710
35	0.59	0.5897	0.00044
40	0.44	0.4454	0.01238

<< Hasil Optimasi >>			

kcA = 0.25			
kr = 0.46042			
SSE = 0.029594			

13. Ekstraksi dari Padatan Berbentuk Slab dalam Tangki Berpengaduk

Ekstraksi padat-cair banyak dipakai pada pengambilan minyak dari biji-bijian hasil pertanian ataupun dari daun-daun dan akar tinggal tanaman. Pada ekstraksi tersebut, bahan padat dikontakkan dengan cairan pelarut (solven) yang bisa melarutkan zat-zat yang akan diambil (solut), sehingga diperoleh larutan solut dalam solven yang dinamakan ekstrak. Selanjutnya solut dipisahkan dengan solvennya, misalnya dengan distilasi.

Misalnya dibahas ekstraksi padat-cair secara *batch* dalam tangki berpengaduk, dengan padatan yang sudah diiris-iris sehingga berbentuk slab-slab tipis yang luasnya dapat dianggap sangat besar. Misal tebal slab = L , kadar solut dalam padatan mula-mula = C_{Ain} g solut/g padatan bebas solut. Massa solven = W g dan mula-mula tidak mengandung solut. Luas permukaan slab tanpa permukaan tepi diketahui S , sedangkan jumlah slab = n .

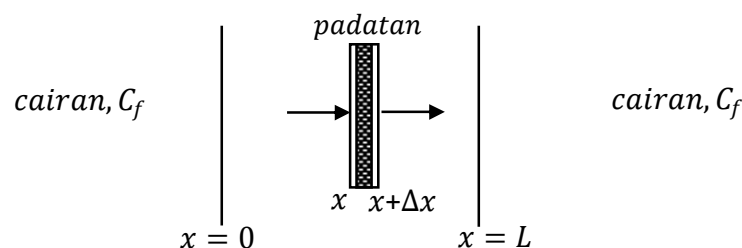
Pada ekstraksi padat-cair ini, perpindahan massa solut dari dalam padatan ke cairan melalui dua tahapan pokok, yaitu difusi dari dalam padatan ke permukaan padatan dan perpindahan massa dari permukaan padatan ke cairan. Kedua proses tersebut berlangsung secara seri. Bila salah satu proses berlangsung relatif jauh lebih cepat, maka kecepatan ekstraksi ditentukan oleh proses yang lambat, tetapi kalau kedua proses berlangsung dengan kecepatan yang tidak jauh berbeda, maka kecepatan ekstraksi ditentukan oleh kedua proses tersebut.

Bila ukuran padatan relatif sangat kecil, maka difusi solut dari dalam padatan ke permukaan berlangsung sangat cepat, sehingga kecepatan ekstraksi ditentukan oleh kecepatan perpindahan massa solut dari permukaan padatan ke cairan. Sebaliknya jika ukuran padatan relatif besar, maka difusi solut dari dalam padatan ke permukaan berlangsung sangat lambat, sehingga kecepatan ekstraksi ditentukan oleh kecepatan difusi solut dari dalam padatan ke permukaan. Untuk kedua kasus khusus tersebut dapat disusun model matematis yang lebih sederhana dari pada untuk kasus umum dimana kedua proses mengontrol kecepatan ekstraksi. Pada bagian ini akan disusun:

- Model matematis untuk kasus dimana difusi dalam padatan mengontrol.
- Model matematis untuk kasus dimana difusi dalam padatan dan transfer massa dari permukaan padatan ke cairan, keduanya mengontrol.

a. Difusi dalam Padatan Mengontrol

Karena slab tipis dan luas permukaannya relatif sangat besar, maka difusi solut dalam padatan berlangsung satu arah (tegak lurus permukaan yang luas).



Gambar 5.14 *Elemen volum pada slab*

Difusi solut dalam padatan dianggap mengikuti hukum Fick yang berbentuk:

$$N_A (\text{g solut/ waktu/ luas}) = -D_e \cdot \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (5.206)$$

dengan:

C_A = kadar solut dalam padatan (g solut/cm³ padatan)

x = posisi

D_e = difusivitas efektif solut dalam padatan (cm²/detik)

Neraca massa solut dalam elemen volum (Gambar 5.14):

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left[-D_e \cdot (\text{luas}) \cdot \frac{\partial C_A}{\partial x} \Big|_x \right] - \left[-D_e \cdot (\text{luas}) \cdot \frac{\partial C_A}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \right] = (\text{luas}) \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.207)$$

$$\frac{\frac{\partial C_A}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial C_A}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} = \frac{1}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.208)$$

Jika diambil limit $\Delta x \rightarrow 0$, diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial C_A}{\partial x} \right] = \frac{1}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.209)$$

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} = \frac{1}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.210)$$

Keadaan batas:

$$C_A(x, 0) = C_{Ain} \quad (5.211)$$

$$C_A(0, t) = C_f/H \quad (5.212)$$

$$C_A(L, t) = C_f/H \quad (5.213)$$

Keadaan batas (5.212) dan (5.213) diperoleh dengan menganggap bahwa karena transfer massa dari permukaan padatan ke cairan berlangsung relatif sangat cepat maka kadar solut pada permukaan padatan dalam keadaan setimbang dengan kadar solut dalam cairan, dan hubungan kesetimbangan dapat didekati dengan persamaan yang mirip dengan hukum Henry.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial (5.210) dengan keadaan batas (5.211), (5.212), (5.213), diperlukan satu persamaan lagi yaitu untuk C_f . Neraca massa solut pada fasa padat dan cair dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{c} \text{solut dalam} \\ \text{cairan mula - mula} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{solut dalam} \\ \text{padatan mula - mula} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{solut dalam} \\ \text{cairan} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{solut dalam} \\ \text{padatan} \end{array} \right]$$

$$W \cdot C_{fo} + n \cdot S \cdot L \cdot C_{Ain} = W \cdot C_f + n \cdot S \int_0^L C_A \cdot dx \quad (5.214)$$

(jumlah solut dalam padatan adalah integrasi dari jumlah solut dalam elemen volum, $dm_A = S \cdot dx \cdot C_A$).

Manipulasi persamaan (5.214) menghasilkan:

$$C_f = C_{fo} + \frac{n \cdot S}{W} \left(L \cdot C_{Ain} - \int_0^L C_A \cdot dx \right) \quad (5.215)$$

Persamaan-persamaan matematis yang terbentuk diselesaikan secara numeris, dengan *finite difference approximation* cara implisit. Interval tebal dibagi menjadi N bagian yang masing-masing tebalnya Δx dan batas-batas interval diberi indeks $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Sedangkan interval waktu dibagi menjadi interval kecil-kecil yang besarnya masing-masing Δt dan batas-batas interval diberi indeks $j = 0, 1, 2, \dots$

Pendekatan implisit untuk persamaan (5.210) berbentuk:

$$\frac{(C_A)_{i-1,j+1} - 2(C_A)_{i,j+1} + (C_A)_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{D_e} \frac{(C_A)_{i,j+1} - (C_A)_{i,j}}{\Delta t} \quad (5.216)$$

Manipulasi persamaan (5.216) menghasilkan:

$$(C_A)_{i-1,j+1} + (-2 - M)(C_A)_{i,j+1} + (C_A)_{i+1,j+1} = -M(C_A)_{i,j} \quad (5.217)$$

Dalam hal ini:

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{D_e \cdot \Delta t} \quad (5.218)$$

Persamaan (5.217) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$. Persamaan untuk $i=0$ diperoleh dari persamaan (5.212) sebagai berikut:

$$(C_A)_{0,j+1} = (C_f)_{j+1} / H \quad (5.219)$$

Persamaan untuk $1 - N$ diperoleh dari persamaan (5.213) sebagai berikut:

$$(C_A)_{N,j+1} = (C_f)_{j+1} / H \quad (5.220)$$

Jika harga-harga C_A dan C_f dalam indeks waktu j tersedia, maka berdasar persamaan (5.215), (5.217), (5.219), (5.220), harga-harga C_A dan C_f dengan indeks waktu $j+1$ bisa dihitung sebagai berikut. Dicoba suatu harga $(C_f)_{j+1}$ (sebagai pendekatan awal bisa dicoba $(C_f)_{j+1} \approx (C_f)_j$). Kemudian dihitung harga-harga $(C_A)_{i,j+1}$ dengan persamaan (5.217), (5.219), (5.220) (persamaan matriks tridiagonal). Selanjutnya dihitung harga $(C_f)_{j+1}$ yang lebih baik, dengan integrasi numeris persamaan (5.215) (*Simpson's rule*), berdasar harga-harga $(C_A)_{i,j+1}$. Sesudah itu dihitung lagi harga-harga $(C_A)_{i,j+1}$ dengan persamaan (5.217), (5.219), (5.220), kemudian dihitung harga $(C_f)_{j+1}$ yang lebih baik lagi dengan persamaan (5.215).

Demikian seterusnya, dilakukan proses iterasi sampai diperoleh harga-harga yang cukup baik (relatif tetap).

Karena harga-harga C_A dan C_f dengan indeks waktu $j=0$ tersedia (keadaan awal) maka harga C_A dan C_f dengan indeks waktu $j=1$ dapat dihitung dengan cara seperti tersebut diatas. Jika harga C_A dan C_f dengan indeks waktu $j=1$ sudah tersedia maka dengan cara yang sama, dapat dihitung harga-harga C_A dan C_f dengan indeks waktu $j=2$. Demikian seterusnya. Jumlah A terekstraksi dapat dihitung dengan persamaan:

$$A_{terekstraksi} = \frac{W.C_f}{n.S.L.C_{Ain}} \times 100\% \quad (5.221)$$

Contoh program komputer untuk pelaksanaan hitungan untuk $D_e = 0,00001$ cm²/detik; $H = 0,4$; $n = 200$; $L = 0,08$ cm; $S = 10$ cm²; $W = 1200$ g; $C_{Ain} = 0,08$ gmol/ cm³; $C_{f0} = 0$; $N = 40$; $M = 4$; jumlah interval waktu = 200; jumlah interval waktu sampai cetak = 40; adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_513a
clc
clear all
data=[0.00001,0.4,200,0.08,10,1200,0.08,0,40,200,40,4];
disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Difusifitas efektif          = ' num2str(data(1)) ' cm^2/detik']);
disp(['Konstanta Henry              = ' num2str(data(2))]);
disp(['Jumlah slab                   = ' num2str(data(3))]);
disp(['Tebal slab                    = ' num2str(data(4)) ' cm']);
disp(['Luas permukaan slab (tanpa permukaan tepi) = ' num2str(data(5)) ' cm^2']);
disp(['Massa solven                  = ' num2str(data(6)) ' g']);
disp(['Kadar solut dalam padatan mula-mula = ' num2str(data(7)) ' g-solut/g-padatan bebas solut']);
disp(['Kadar solut dalam cairan mula-mula = ' num2str(data(8)) ' g-solut/g-solven']);
disp(['Jumlah interval panjang       = ' num2str(data(9))]);
disp(['Jumlah interval waktu         = ' num2str(data(10))]);
disp(['Jumlah interval waktu sampai cetak = ' num2str(data(11))]);
disp(['Modulus                      = ' num2str(data(12))]);

DE=data(1);
H=data(2);
```

```

NSLAB=data(3);
TEBAL=data(4);
S=data(5);
W=data(6);
CAIN=data(7);
CFIN=data(8);
NINT=data(9);
NTIME=data(10);
NPRINT=data(11);
AM=data(12);

DELX=TEBAL/NINT;
DELT=DELX.^2/(DE*AM);
CA=CAIN*ones((NINT+1),1);
CF=CFIN;
ITIME=0;
IPRINT=NPRINT;
loop=0;
while loop==0
    if IPRINT>=(NPRINT-0.01)
        disp(' ');
        EXTR=100*W*CF./(NSLAB*S*TEBAL*CAIN);
        disp(['Waktu = ' num2str(ITIME*DELT) ' menit']);
        disp('-----');
        disp(['CF      = ' num2str(CF) ' (g-solut/g-solven)']);
        disp(['Terekstraksi = ' num2str(EXTR) ' %']);
        disp('-----');
        disp(' x (cm)      CA(g/cm^3) ');
        disp('-----');
        for i=1:(NINT/8):(NINT+1)
            JARAK=(i-1)*DELX;
            fprintf(' %1.2f %1.4f \n',JARAK,CA(i));
        end
        disp('-----');
        IPRINT=0;
    end
    if ITIME>=(NTIME-0.01)
        loop=1;
        break;
    end
    [CAIR_hit,CF_hit]=hitung_CAIR(CF,H,AM,CA,NINT,DELX,CFIN,NSLAB,S,TEBAL,CAIN,W);
    CA=CAIR_hit;

```

```

    ITIME=ITIME+1;
    IPRINT=IPRINT+1;
    CF=CF_hit;
end
end

function [CAIR_hit,CF_hit]=hitung_CAIR(CF,H,AM,CA,NINT,DELX,CFIN,NSLAB,S,TEBAL,CAIN,W)
for iter=1:2
    CANEW(1)=CF/H;
    CANEW(NINT+1)=CF/H;
    A(2)=0;
    B(2)=-2-AM;
    C(2)=1;
    D(2)=-AM*CA(2)-CANEW(1);
    for i=3:(NINT-1)
        A(i)=1;
        B(i)=-2-AM;
        C(i)=1;
        D(i)=-AM*CA(i);
    end
    A(NINT)=1;
    B(NINT)=-2-AM;
    C(NINT)=0;
    D(NINT)=-AM*CA(NINT)-CANEW(NINT+1);

    for i=3:NINT
        RATIO=A(i)/B(i-1);
        B(i)=B(i)-RATIO*C(i-1);
        D(i)=D(i)-RATIO*D(i-1);
    end
    CANEW(NINT)=D(NINT)/B(NINT);
    for i=(NINT-1):-1:2
        CANEW(i)=(D(i)-C(i)*CANEW(i+1))/B(i);
    end
    CF=0;
    CF=CF+CANEW(1);
    for i=2:NINT
        Y=2*CANEW(i);
        if (-1)^i>0
            Y=2*Y;
        end
        CF=CF+Y;
    end
end

```

```

CF=CF+CANEW(NINT+1);
CF=CF*DELX./3;
CF=CFIN+NSLAB*S*(TEBAL*CAIN-CF)./W;
end
for i=1:(NINT+1)
    CA(i)=CANEW(i);
end
CAIR_hit=CA;
CF_hit=CF;
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

```

-----
<< D A T A >>
-----
Difusifitas efektif          = 1e-05 cm^2/detik
Konstanta Henry              = 0.4
Jumlah slab                  = 200
Tebal slab                   = 0.08 cm
Luas permukaan slab (tanpa permukaan tepi) = 10 cm^2
Massa solven                 = 1200 g
Kadar solut dalam padatan mula-mula = 0.08 g-solut/g-padatan bebas solut
Kadar solut dalam cairan mula-mula  = 0 g-solut/g-solven
Jumlah interval panjang      = 40
Jumlah interval waktu        = 200
Jumlah interval waktu sampai cetak = 40
Modulus                      = 4

Waktu = 0 menit
-----
CF                          = 0.00000e+00 g-solut/g-solven
Terekstraksi               = 0.0000 %

```

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0800
0.01	0.0800
0.02	0.0800
0.03	0.0800
0.04	0.0800
0.05	0.0800
0.06	0.0800
0.07	0.0800
0.08	0.0800

Waktu = 4 menit

CF = 1.81496e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 17.0153 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0045
0.01	0.0599
0.02	0.0779
0.03	0.0799
0.04	0.0800
0.05	0.0799
0.06	0.0779
0.07	0.0599
0.08	0.0045

Waktu = 8 menit

CF = 2.52104e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 23.6347 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0063
0.01	0.0478
0.02	0.0713
0.03	0.0785
0.04	0.0797
0.05	0.0785
0.06	0.0713
0.07	0.0478
0.08	0.0063

Waktu = 12 menit

CF = 3.04505e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 28.5474 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0076
0.01	0.0416
0.02	0.0652
0.03	0.0758
0.04	0.0784
0.05	0.0758
0.06	0.0652
0.07	0.0416
0.08	0.0076

Waktu = 16 menit

CF = 3.47532e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 32.5811 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0087
0.01	0.0380
0.02	0.0604
0.03	0.0725
0.04	0.0761
0.05	0.0725
0.06	0.0604
0.07	0.0380
0.08	0.0087

Waktu = 20 menit

CF = 3.84582e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 36.0546 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0096
0.01	0.0355
0.02	0.0565
0.03	0.0691
0.04	0.0731
0.05	0.0691
0.06	0.0565
0.07	0.0355
0.08	0.0096

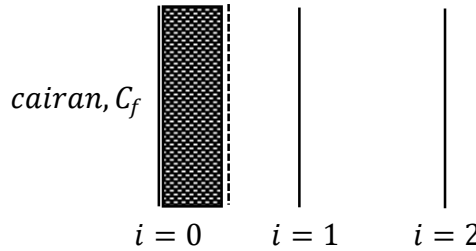
b. Difusi dalam Padatan dan Transfer Massa dari Permukaan ke Cairan Mengontrol

Kecepatan transfer massa solut dari permukaan padatan ke cairan mengikuti persamaan

$$N_A = k_c \cdot (C_f^* - C_f) \quad (5.222)$$

dengan C_f^* adalah kadar dalam cairan yang setimbang dengan permukaan padatan.

Model matematis untuk kasus ini mirip dengan model matematis kasus sebelumnya (pada a), hanya saja keadaan batas pada permukaan [persamaan (5.212), (5.213), (5.219), (5.220)] tidak bisa dipakai lagi. Sebagai gantinya, disusun persamaan neraca massa solut pada permukaan padatan.



Gambar 5.15 Elemen volum disekitar $i = 0$

Neraca massa solut pada elemen volum setebal $\Delta x/2$ pada permukaan $i = 0$ (Gambar 5.15):

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$k_c \cdot S \cdot ((C_f)_{j+1} - C_f^*) - [-D_e \cdot S \cdot \frac{(C_A)_{1,j+1} - (C_A)_{0,j+1}}{\Delta x}] = \frac{\Delta x}{2} \cdot S \cdot \frac{(C_A)_{0,j+1} - (C_A)_{0,j}}{\Delta t} \quad (5.223)$$

$$\begin{aligned} k_c \left((C_f)_{j+1} - H(C_A)_{0,j+1} \right) + \frac{D_e}{\Delta x} ((C_A)_{1,j+1} - (C_A)_{0,j+1}) \\ = \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} ((C_A)_{0,j+1} - (C_A)_{0,j}) \end{aligned} \quad (5.224)$$

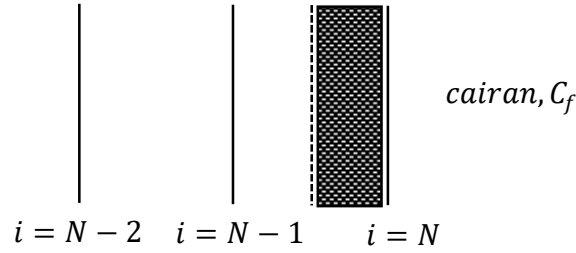
Manipulasi persamaan (5.224) menghasilkan:

$$\left[-1 - \beta H - \frac{1}{2} M \right] (C_A)_{0,j+1} + (C_A)_{1,j+1} = -\beta (C_f)_{j+1} - \frac{1}{2} M (C_A)_{0,j} \quad (5.225)$$

dengan:

$$\beta = \frac{k_c \cdot \Delta x}{D_e} \quad (5.226)$$

$$M = \frac{(\Delta x^2)}{D_e \cdot \Delta t} \quad (5.227)$$



Gambar 5.16 Elemen volum disekitar $i = N$

Neraca massa solut pada elemen volum setebal $\Delta x/2$ pada permukaan $i = N$ (Gambar 5.16):

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left[-D_e \cdot S \frac{(C_A)_{N,j+1} - (C_A)_{N-1,j+1}}{\Delta x} \right] - \left(k_c \cdot S \cdot (C_f^* - (C_f)_{j+1}) \right) = \frac{\Delta x}{2} \cdot S \cdot \frac{(C_A)_{N,j+1} - (C_A)_{N,j}}{\Delta t} \quad (5.228)$$

$$-(C_A)_{N,j+1} + (C_A)_{N-1,j+1} - \frac{k_c \cdot \Delta x}{D_e} (H(C_A)_{N,j+1} - (C_f)_{j+1}) = \frac{(\Delta x)}{2D_e \Delta t} ((C_A)_{N,j+1} - (C_A)_{N,j}) \quad (5.229)$$

Manipulasi persamaan (5.229) menghasilkan:

$$(C_A)_{N-1,j+1} + \left[-1 - \beta H - \frac{1}{2} M \right] (C_A)_{N,j+1} = -\beta (C_f)_{j+1} - \frac{1}{2} M (C_A)_{N,j} \quad (5.230)$$

Jadi persamaan-persamaan yang tersusun adalah persamaan (5.215), (5.217), (5.225), dan (5.230). Strategi pelaksanaan hitungannya sama seperti pada kasus a.

Contoh program komputer untuk pelaksanaan hitungan untuk $D_e = 0,00001$ cm²/detik; $k_c = 1000$ cm/detik; $H = 0,4$; $n = 200$; $L = 0,08$ cm; $S = 10$ cm²; $W = 1200$ g; $C_{Ain} = 0,08$ gmol/ cm³; $C_{f0} = 0$; $N = 40$; $M = 4$; jumlah interval waktu = 200; jumlah interval waktu sampai cetak = 40; adalah sebagai berikut:

```

function Latihan_513b
clc
clear all
data=[0.00001,1000,0.4,200,0.08,10,1200,0.08,0.40,200,40,4];
disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Difusifitas efektif          = ' num2str(data(1)) ' cm^2/detik']);
disp(['Koefisien transfer massa      = ' num2str(data(2)) ' cm/detik']);
disp(['Konstanta Henry                = ' num2str(data(3))]);
disp(['Jumlah slab                    = ' num2str(data(4))]);
disp(['Tebal slab                     = ' num2str(data(5)) ' cm']);
disp(['Luas permukaan slab (tanpa permukaan tepi) = ' num2str(data(6)) ' cm^2']);
disp(['Massa solven                   = ' num2str(data(7)) ' g']);
disp(['Kadar solut dalam padatan mula-mula = ' num2str(data(8)) ' g-solut/g-padatan bebas solut']);
disp(['Kadar solut dalam cairan mula-mula = ' num2str(data(9)) ' g-solut/g-solven']);
disp(['Jumlah interval panjang        = ' num2str(data(10))]);
disp(['Jumlah interval waktu          = ' num2str(data(11))]);
disp(['Jumlah interval waktu sampai cetak = ' num2str(data(12))]);
disp(['Modulus                        = ' num2str(data(13))]);

DE=data(1);
AKC=data(2);
H=data(3);
NSLAB=data(4);
TEBAL=data(5);
S=data(6);
W=data(7);
CAIN=data(8);
CFIN=data(9);
NINT=data(10);
NTIME=data(11);
NPRINT=data(12);
AM=data(13);

DELX=TEBAL/NINT;
DELT=DELX.^2/(DE*AM);
BETA=AKC*DELX/DE;
CA=CAIN*ones((NINT+1),1);
CF=CFIN;
ITIME=0;
IPRINT=NPRINT;

```

```

loop=0;
while loop==0
    if IPRINT>=(NPRINT-0.01)
        disp(' ');
        EXTR=100*W*CF./(NSLAB*S*TEBAL*CAIN);
        disp(['Waktu = ' num2str(ETIME*DELT) ' menit']);
        disp('-----');
        disp(['CF      = ' num2str(CF) ' (g-solut/g-solven)']);
        disp(['Terekstraksi = ' num2str(EXTR) ' %']);
        disp('-----');
        disp('  x (cm)      CA(g/cm^3) ');
        disp('-----');
        for i=1:(NINT/8):(NINT+1)
            JARAK=(i-1)*DELX;
            fprintf('    %1.2f      %1.4f \n',JARAK,CA(i));
        end
        disp('-----');
        IPRINT=0;
    end
    if ETIME>=(NETIME-0.01)
        loop=1;
        break;
    end
    [CAIR_hit,CF_hit]=hitung_CAIR(CF,H,AM,CA,NINT,DELX,CFIN,NSLAB,S,TEBAL,CAIN,W,BETA);
    CA=CAIR_hit;
    ETIME=ETIME+1;
    IPRINT=IPRINT+1;
    CF=CF_hit;
end
end

function
[CAIR_hit,CF_hit]=hitung_CAIR(CF,H,AM,CA,NINT,DELX,CFIN,NSLAB,S,TEBAL,CAIN,W,BETA)
for iter=1:2
    A(1)=0;
    B(1)=-1-BETA*H-AM/2;
    C(1)=1;
    D(1)=-BETA*CF-AM*CA(1)/2;
    for i=2:NINT
        A(i)=1;
        B(i)=-2-AM;
        C(i)=1;
        D(i)=-AM*CA(i);
    end
end

```

```

end
A(NINT+1)=1;
B(NINT+1)=-1-BETA*H-AM/2;
C(NINT+1)=0;
D(NINT+1)=-BETA*CF-AM*CA(NINT+1)/2;

for i=2:(NINT+1)
    RATIO=A(i)/B(i-1);
    B(i)=B(i)-RATIO*C(i-1);
    D(i)=D(i)-RATIO*D(i-1);
end
CANEW(NINT+1)=D(NINT+1)/B(NINT+1);
for i=NINT:-1:1
    CANEW(i)=(D(i)-C(i)*CANEW(i+1))/B(i);
end
CF=0;
CF=CF+CANEW(1);
for i=2:NINT
    Y=2*CANEW(i);
    if (-1)^i>0
        Y=2*Y;
    end
    CF=CF+Y;
end
CF=CF+CANEW(NINT+1);
CF=CF*DELX./3;
CF=CFIN+NSLAB*S*(TEBAL*CAIN-CF)./W;
end
for i=1:(NINT+1)
    CA(i)=CANEW(i);
end
CAIR_hit=CA;
CF_hit=CF;
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

<< D A T A >>	
Difusifitas efektif	= 1e-05 cm ² /detik
Koefisien transfer massa	= 1000 cm/detik
Konstanta Henry	= 0.4
Jumlah slab	= 200
Tebal slab	= 0.08 cm
Luas permukaan slab (tanpa permukaan tepi)	= 10 cm ²
Massa solven	= 1200 g
Kadar solut dalam padatan mula-mula	= 0.08 g-solut/g-padatan bebas solut
Kadar solut dalam cairan mula-mula	= 0 g-solut/g-solven
Jumlah interval panjang	= 40
Jumlah interval waktu	= 200
Jumlah interval waktu sampai cetak	= 40
Modulus	= 4
Waktu = 0 menit	
CF (g-solut/g-solven)	= 0.00000e+00
Terekstraksi (%)	= 0.0000
x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0800
0.01	0.0800
0.02	0.0800
0.03	0.0800
0.04	0.0800
0.05	0.0800
0.06	0.0800
0.07	0.0800
0.08	0.0800
Waktu = 4 menit	
CF	= 1.81496e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi	= 17.0152 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0045
0.01	0.0599
0.02	0.0779
0.03	0.0799
0.04	0.0800
0.05	0.0799
0.06	0.0779
0.07	0.0599
0.08	0.0045

Waktu = 8 menit

CF = 2.52103e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 23.6347 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0063
0.01	0.0478
0.02	0.0713
0.03	0.0785
0.04	0.0797
0.05	0.0785
0.06	0.0713
0.07	0.0478
0.08	0.0063

Waktu = 12 menit

CF = 3.04505e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 28.5473 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0076
0.01	0.0416
0.02	0.0652
0.03	0.0758
0.04	0.0784
0.05	0.0758
0.06	0.0652
0.07	0.0416
0.08	0.0076

Waktu = 16 menit

CF = 3.47531e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 32.5810 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0087
0.01	0.0380
0.02	0.0604
0.03	0.0725
0.04	0.0761
0.05	0.0725
0.06	0.0604
0.07	0.0380
0.08	0.0087

Waktu = 20 menit

CF = 3.84582e-03 g-solut/g-solven
Terekstraksi = 36.0545 %

x (cm)	CA(g/cm ³)
0.00	0.0096
0.01	0.0355
0.02	0.0565
0.03	0.0691
0.04	0.0731
0.05	0.0691
0.06	0.0565
0.07	0.0355
0.08	0.0096

Pembaca dipersilahkan mencoba menghitung kasus ekstraksi padat cair dengan dua model (pada a dan b). Akan terlihat bahwa bila harga k_c relatif besar, kedua model tersebut akan memberikan hasil hitungan yang hampir sama, sedang bila harga k_c relatif kecil, kedua model akan memberikan hasil hitungan yang berbeda. Jadi kasus dengan k_c besar dapat didekati dengan dua model matematis.

14. Ekstraksi Padat-Cair dalam Kolom *Fixed Bed*

Dibahas ekstraksi padat-cair dimana butiran digiling lebih dahulu menjadi butir-butir kecil, kemudian dimasukkan dalam tabung tegak. Solven dialirkan secara kontinyu, masuk dari atas, keluar dari bawah berupa ekstrak. Ekstraksi dihentikan setelah sebagian besar solut dalam padatan terambil. Hal ini ditandai dengan rendahnya kadar solut dalam ekstrak yang keluar. Ingin disusun model matematis untuk menghitung kadar solut dalam padatan sebagai fungsi posisi dan waktu ($X_A = f(z,t)$) dan dalam cairan sebagai fungsi posisi dan waktu ($C_A = f(z,t)$).

Oleh karena butiran cukup kecil maka kecepatan difusi solut dari dalam butir ke permukaan relatif cepat, sehingga konsentrasi A dalam satu butir dapat dianggap seragam dan kecepatan ekstraksi dikontrol oleh kecepatan transfer massa solut dari permukaan butir ke cairan yang persamaannya dianggap berbentuk:

$$N_A \text{ (g solut/waktu/volum bed)} = k_c a (C_A^* - C_A) \quad (5.231)$$

dengan:

C_A = kadar solut dalam cairan (g solut/g solven bebas solut)

C_A^* = kadar solut dalam cairan yang setimbang dengan kadar solut pada permukaan padatan

$k_c a$ = koefisien transfer massa volumetris (1/waktu)

Transfer massa solut dalam cairan arah aksial tabung berlangsung dengan dua mekanisme, yaitu dibawa aliran dan difusi/dispersi aksial. Kecepatan difusi/dispersi aksial didekati dengan persamaan:

$$N_A \text{ (g solut/waktu/luas tampang tabung)} = -D_e \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \quad (5.232)$$

dengan:

D_e = difusivitas efektif aksial (luas/waktu)

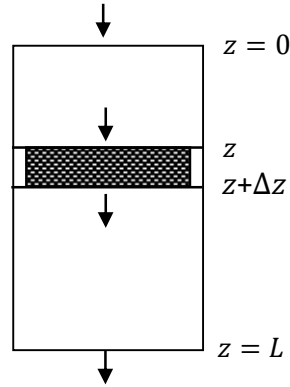
Hubungan kesetimbangan padat-cair dianggap mengikuti persamaan yang mirip dengan hukum Henry, yaitu:

$$C_A^* = H \cdot X_A \quad (5.233)$$

dengan:

H = tetapan kesetimbangan

Misal tinggi tumpukan butir = L , luas tampang tabung = S , kecepatan aliran solven masuk = v g solven/waktu/luas tampang tabung, kadar solut dalam padatan mula-mula = X_{Ain} , kadar solut dalam solven mula-mula $C_{Ain} = 0$, rapat massa bulk padatan bebas solut = ρ_B g padatan bebas solut/volum tumpukan, porositas tumpukan = ε .



Gambar 5.17 *Elemen volum dalam fixed bed*

Neraca massa solut dalam cairan dalam elemen volum (Gambar 5.17).

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left[-D_e \cdot S \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_z + S \cdot v \cdot C_A \Big|_z + k_c a \cdot S \cdot \Delta z (\bar{C}_A^* - \bar{C}_A) \right] - \left[-D_e \cdot S \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} + S \cdot v \cdot C_A \Big|_{z+\Delta z} \right] = S \cdot \Delta z \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.234)$$

$$\frac{\frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial C_A}{\partial z} \Big|_z}{\Delta z} - \frac{v}{D_e} \frac{C_A \Big|_{z+\Delta z} - C_A \Big|_z}{\Delta z} + \frac{k_c a}{D_e} (\bar{C}_A^* - \bar{C}_A) = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.235)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial C_A}{\partial z} \right] - \frac{v}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{k_c a}{D_e} (C_A^* - C_A) = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.236)$$

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - \frac{v}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{k_c a}{D_e} (C_A^* - C_A) = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{\partial C_A}{\partial t} \quad (5.237)$$

Dalam hal ini,

$$C_A^* = H \cdot X_A \quad (5.238)$$

Neraca massa solut dalam padatan pada elemen volum (Gambar 5.17):

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$0 - k_c a \cdot S \cdot \Delta z \cdot (\bar{C}_A^* - \bar{C}_A) = S \cdot \Delta z \cdot \rho_B \frac{\partial X_A}{\partial t} \quad (5.239)$$

$$\frac{\partial X_A}{\partial t} = - \frac{k_c a}{\rho_B} (\bar{C}_A^* - \bar{C}_A) \quad (5.240)$$

Jika diambil $\Delta z \rightarrow 0$, diperoleh:

$$\frac{\partial X_A}{\partial t} = - \frac{k_c a}{\rho_B} (C_A^* - C_A) \quad (5.241)$$

Persamaan (5.237), (5.238), (5.241) akan diselesaikan secara numeris cara eksplisit. Panjang L dibagi menjadi N bagian kecil-kecil yang masing-masing besarnya Δz . Batas-batas

interval diberi indeks $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Waktu dibagi menjadi interval kecil-kecil sebesar Δt . Batas-batas interval diberi indeks $j = 0, 1, 2, \dots$

Dengan *finite difference approximation* cara eksplisit, persamaan (5.237) berubah menjadi:

$$\frac{(C_A)_{i-1,j} - 2(C_A)_{i,j} + (C_A)_{i+1,j}}{(\Delta z)^2} - \frac{v}{D_e} \frac{(C_A)_{i+1,j} - (C_A)_{i-1,j}}{2\Delta z} + \frac{k_c a}{D_e} [(C_A^*)_{i,j} - (C_A)_{i,j}] = \frac{\varepsilon}{D_e} \frac{(C_A)_{i,j+1} - (C_A)_{i,j}}{\Delta t} \quad (5.242)$$

Penyederhanaan persamaan (5.242) menghasilkan:

$$(C_A)_{i,j+1} = \frac{(1+\alpha)(C_A)_{i-1,j} + (-2-\beta+\gamma)(C_A)_{i,j} + (1-\alpha)(C_A)_{i+1,j} + \beta(C_A^*)_{i,j}}{\gamma} \quad (5.243)$$

dengan:

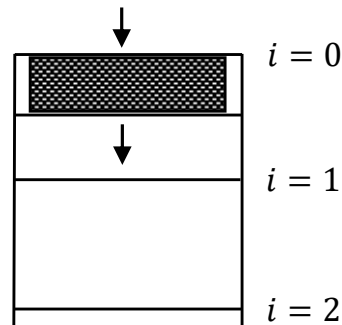
$$\alpha = \frac{v \cdot \Delta z}{2 \cdot D_e} \quad (5.244)$$

$$\beta = \frac{k_c a \cdot (\Delta z)^2}{D_e} \quad (5.245)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon (\Delta z)^2}{D_e \cdot \Delta t} \quad (5.246)$$

Persamaan (5.243) berlaku untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Persamaan untuk $i = 0$ diperoleh dengan menyusun neraca massa solut dalam cairan, dalam elemen volum setebal $\Delta z/2$ disekitar tempat masuk solven (Gambar 5.18).



Gambar 5.18 Elemen volum pada $i = 0$

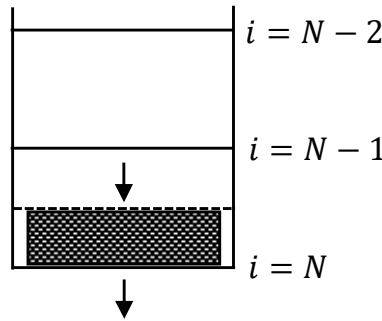
Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left[v \cdot S \cdot (C_A)_{0,j} + k_c a \cdot S \cdot \frac{\Delta z}{2} [(C_A^*)_{0,j} - (C_A)_{0,j}] \right] - \left[-D_e \cdot S \frac{(C_A)_{1,j} - (C_A)_{0,j}}{\Delta z} + v \cdot S \frac{(C_A)_{0,j} + (C_A)_{1,j}}{2} \right] = S \cdot \frac{\Delta z}{2} \cdot \varepsilon \frac{(C_A)_{0,j+1} - (C_A)_{0,j}}{\Delta t} \quad (5.247)$$

Penyederhanaan persamaan (5.247) menghasilkan:

$$(C_A)_{0,j+1} = \frac{(-2+2\alpha-\beta+\gamma)(C_A)_{0,j} + (2-2\alpha)(C_A)_{1,j} + \beta(C_A^*)_{0,j}}{\gamma} \quad (5.248)$$

Persamaan untuk $i = N$ diperoleh dengan menyusun neraca massa solut dalam fasa cair, pada elemen volum setebal $\Delta z/2$ disekitar $i = N$ (Gambar 5.19).



Gambar 5.19 Elemen volum pada $i = N$

Rate of Input - Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left[-D_e \cdot S \frac{(C_A)_{N,j} - (C_A)_{N-1,j}}{\Delta z} + v \cdot S \frac{(C_A)_{N-1,j} + (C_A)_{N,j}}{2} + k_c a \cdot S \cdot \frac{\Delta z}{2} [(C_A^*)_{N,j} - (C_A)_{N,j}] \right] - \left[v \cdot S \cdot (C_A)_{N,j} \right] = S \cdot \frac{\Delta z}{2} \cdot \varepsilon \frac{(C_A)_{N,j+1} - (C_A)_{N,j}}{\Delta t} \quad (5.249)$$

Penyederhanaan persamaan (5.249) menghasilkan:

$$(C_A)_{N,j+1} = \frac{(2+2\alpha)(C_A)_{N-1,j} + (-2-2\alpha-\beta+\gamma)(C_A)_{N,j} + \beta(C_A^*)_{N,j}}{\gamma} \quad (5.250)$$

Finite difference approximation untuk persamaan (5.241) berbentuk:

$$\frac{(X_A)_{i,j+1} - (X_A)_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{k_c a}{\rho_B} [(C_A^*)_{i,j} - (C_A)_{i,j}] \quad (5.251)$$

Penyederhanaan persamaan (5.251) menghasilkan:

$$(X_A)_{i,j+1} = (X_A)_{i,j} - \frac{k_c a \Delta t}{\rho_B} [(C_A^*)_{i,j} - (C_A)_{i,j}] \quad (5.252)$$

Persamaan (5.252) berlaku untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$.

Bentuk *finite difference approximation* untuk persamaan kesetimbangan (5.238) adalah:

$$(C_A)_{i,j} = H \cdot (X_A)_{i,j} \quad (5.253)$$

Jika harga-harga C_A dan X_A dengan indeks waktu j diketahui, maka dengan persamaan (5.243), (5.248), (5.250), (5.252), dan (5.253), dapat dihitung harga-harga C_A dan X_A dengan indeks waktu $j+1$. Karena harga-harga C_A dan X_A pada saat awal ($j=0$) diketahui ($(C_A)_{i,0} = C_{Ain} = 0$ dan $(X_A)_{i,0} = X_{Ain}$), maka harga-harga C_A dan X_A dengandengan indeks waktu $j = 1$ dapat dihitung. Setelah harga-harga C_A dan X_A dengan indeks waktu $j = 1$ terhitung, maka harga-harga C_A dan X_A dengan indeks waktu $j = 2$ dapat dihitung. Demikian seterusnya harga-harga C_A dan X_A pada berbagai posisi dan waktu dapat dihitung.

Contoh program komputer untuk pelaksanaan hitungan untuk $\nu = 1,125 \text{ g/menit/cm}^2$; $\varepsilon = 0,587$; $L = 40 \text{ cm}$; $\rho_B = 1,029 \text{ g/cm}^3$; $H = 13,55$; $X_{Ain} = 0,13206$; $C_{Ain} = 0$; $k_{ca} = 0,005 \text{ (l/menit)}$; $D_e = 0,05 \text{ cm}^2/\text{menit}$; $\Delta t = 0,01 \text{ menit}$; $N = 40$; jumlah interval waktu = 1000; jumlah interval waktu sampai cetak = 500; adalah sebagai berikut:

```
function Latihan_514
clc
clear all
data=[1.125,0.587,40,1.029,13.55,0.13206,0,0.005,0.05,1000,500,40,0.01];
disp('-----');
disp('          << D A T A >>          ');
disp('-----');
disp(['Kecepatan aliran solven          = ' num2str(data(1)) ' g-solven/menit.cm^2']);
disp(['Porositas bed                    = ' num2str(data(2))]);
disp(['Tinggi bed                        = ' num2str(data(3)) ' cm']);
disp(['Bulk density butir                = ' num2str(data(4)) ' gr/cm^3']);
disp(['Tetapan kesetimbangan              = ' num2str(data(5))]);
disp(['Kadar solut dalam padatan mula-mula = ' num2str(data(6)) ' g-solut/g-padatan bebas solut']);
disp(['Kadar solut dalam cairan mula-mula  = ' num2str(data(7)) ' g-solut/g-solven']);
disp(['Koefisien transfermassa volumetris = ' num2str(data(8)) ' 1/menit']);
disp(['Difusivitas efektif aksial         = ' num2str(data(9)) ' cm^2/menit']);
disp(['Jumlah interval waktu              = ' num2str(data(10))]);
disp(['Jumlah interval waktu sampai cetak = ' num2str(data(11))]);
disp(['Jumlah interval panjang           = ' num2str(data(12))]);
disp(['Interval waktu                    = ' num2str(data(13)) ' menit']);
```

```

V=data(1);
EPS=data(2);
AL=data(3);
RHO=data(4);
H=data(5);
XIN=data(6);
CAIN=data(7);
AKCA=data(8);
DE=data(9);
NTIME=data(10);
NPRINT=data(11);
NINT=data(12);
DELT=data(13);

CA=CAIN*ones((NINT+1),1);
X=XIN*ones((NINT+1),1);
DELZ=AL/NINT;
ALPH=V*DELZ/(2*DE);
BETA=AKCA*DELZ.^2/DE;
GAMA=EPS*DELZ.^2/(DE*DELT);

ITIME=0;
IPRINT=NPRINT;
loop=0;
while loop==0
    if IPRINT>=(NPRINT-0.01)
        disp(' ');
        disp(['Waktu = ' num2str(ITIME*DELT) ' menit']);
        disp('-----');
        disp(' Jarak(cm)  CA(g/cm^3)      X ');
        disp('-----');
        for i=1:5:(NINT+1)
            JARAK=(i-1)*DELZ;
            fprintf(' %1.0f      %1.5e      %1.5e\n',JARAK,CA(i),X(i));
        end
        disp('-----');
        IPRINT=0;
    end
    if ITIME>=(NTIME-0.01)
        loop=1;
        break;
    else
        [CA_hit,X_hit]=hitung_CAIR(H,X,ALPH,BETA,GAMA,CA,NINT,AKCA,DELT,RHO);
    end
end

```



```

    CA=CA_hit;
    ITIME=ITIME+1;
    IPRINT=IPRINT+1;
    X=X_hit;
end
end
end

function [CA_hit,X_hit]=hitung_CAIR(H,X,ALPH,BETA,GAMA,CA,NINT,AKCA,DELT,RHO)
CSTAR=H*X(1);
CNEW(1)=((-2-2*ALPH-BETA+GAMA)*CA(1)+(2-2*ALPH)*CA(2)+BETA*CSTAR)/GAMA;
for i=2:NINT
    CSTAR=H*X(i);
    CNEW(i)=((1+ALPH)*CA(i-1)+(-2-BETA+GAMA)*CA(i)+(1-
ALPH)*CA(i+1)+BETA*CSTAR)/GAMA;
end
CSTAR=H*X(NINT+1);
CNEW(NINT+1)=((2+2*ALPH)*CA(NINT)+(-2-2*ALPH-
BETA+GAMA)*CA(NINT+1)+BETA*CSTAR)/GAMA;

for i=1:(NINT+1)
    CSTAR=H*X(i);
    XNEW(i)=X(i)-AKCA*DELT*(CSTAR-CA(i))/RHO;
end
for i=1:(NINT+1)
    CA(i)=CNEW(i);
    X(i)=XNEW(i);
end
CA_hit=CA;
X_hit=X;
end

```

Keluaran program adalah sebagai berikut:

<< D A T A >>		
Kecepatan aliran solven	= 1.125 g-solven/menit.cm ²	
Porositas bed	= 0.587	
Tinggi bed	= 40 cm	
Bulk density butir	= 1.029 gr/cm ³	
Tetapan kesetimbangan	= 13.55	
Kadar solut dalam padatan mula-mula	= 0.13206 g-solut/g-padatan bebas solut	
Kadar solut dalam cairan mula-mula	= 0 g-solut/g-solven	
Koefisien transfermassa volumetris	= 0.005 1/menit	
Difusivitas efektif aksial	= 0.05 cm ² /menit	
Jumlah interval waktu	= 1000	
Jumlah interval waktu sampai cetak	= 500	
Jumlah interval panjang	= 40	
Interval waktu	= 0.01 menit	
Waktu = 0 menit		
Jarak(cm)	CA(g/cm ³)	X
0	0.00000e+00	1.32060e-01
5	0.00000e+00	1.32060e-01
10	0.00000e+00	1.32060e-01
15	0.00000e+00	1.32060e-01
20	0.00000e+00	1.32060e-01
25	0.00000e+00	1.32060e-01
30	0.00000e+00	1.32060e-01
35	0.00000e+00	1.32060e-01
40	0.00000e+00	1.32060e-01

Waktu = 5 menit

Jarak(cm)	CA(g/cm ³)	X
0	5.33818e-05	9.50151e-02
5	3.09098e-02	9.55646e-02
10	6.11433e-02	9.57349e-02
15	6.36480e-02	9.57410e-02
20	6.36664e-02	9.57410e-02
25	6.36664e-02	9.57410e-02
30	6.36664e-02	9.57410e-02
35	6.36664e-02	9.57410e-02
40	6.36664e-02	9.57410e-02

Waktu = 10 menit

Jarak(cm)	CA(g/cm ³)	X
0	1.72317e-04	6.83594e-02
5	2.25410e-02	6.92952e-02
10	4.89073e-02	7.00547e-02
15	8.10601e-02	7.05570e-02
20	1.04862e-01	7.06940e-02
25	1.07494e-01	7.07025e-02
30	1.07558e-01	7.07027e-02
35	1.07558e-01	7.07027e-02
40	1.07558e-01	7.07027e-02

SOAL-SOAL LATIHAN

Dalam bab ini disajikan contoh-contoh soal sebagai latihan penyusunan model matematis, penyelesaian numeris, dan pemrograman komputer. Untuk membandingkan hasil, maka disajikan pula model-model matematis yang telah dijabarkan dan hasil komputasi dari program komputer. Dengan mengerjakan soal-soal dalam bab ini, pembaca diharapkan dapat berlatih untuk menyusun model matematis berdasar *chemical engineering tools*, menyelesaikannya secara numeris, dan membuat program komputernya. Soal-soal tersebut diambil dari tugas-tugas komputer untuk mahasiswa S1 Jurusan Teknik Kimia, Fakultas Teknik UGM pada semester ganjil tahun ajaran 1989/1990, 1990/1991, 1991/1992, 1992/1993, 1993/1994 dan 1994/1995. Tiap-tiap tugas tersebut harus diselesaikan para mahasiswa dalam waktu satu minggu, dan dalam satu semester mahasiswa kira-kira mengerjakan 11 tugas. Dengan bimbingan dosen dan asisten, ternyata tugas-tugas tersebut dapat dikerjakan oleh mahasiswa, bahkan oleh yang belum pernah belajar komputer sekalipun.

Soal 1:

Campuran uap dengan fraksi mol benzene (A) = 0,4 toluene (B) = 0,3 dan ortho-xylene (C) = 0,3 didinginkan pada tekanan tetap $P_t = 76$ cmHg. Ingin dicari pada suhu berapa (K) pengembunan terjadi. Sistem mengikuti hukum Raoult-Dalton. Harga tekanan uap murni mengikuti persamaan:

$$P_A^0 = \exp \left[14,95 - \frac{3764}{T} \right]$$

$$P_B^0 = \exp \left[16,07 - \frac{4497}{T} \right]$$

$$P_C^0 = \exp \left[16,27 - \frac{4934}{T} \right]$$

dengan P_i^0 (cmHg) dan T (K).

Petunjuk: Keseimbangan mengikuti hukum Raoult-Dalton

$$x_i P_i^0 = y_i P_t$$

Jawaban:

$$x_A + x_B + x_C = 1$$

$$f(T) = x_A + x_B + x_C - 1$$

$$= \frac{y_A P_t}{P_A^0} + \frac{y_B P_t}{P_B^0} + \frac{y_C P_t}{P_C^0} - 1 = 0$$

Terapkan metoda Newton-Raphson untuk mencari T , agar $f(T) = 0$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Fraksi mol A ..... = 0.4
Fraksi mol B ..... = 0.3
Fraksi mol C ..... = 0.3
Tekanan ( cm Hg ) ..... = 76
Toleransi suhu ( K ) ..... = 0.01
Interval diferensiasi ( K ) .. = 0.01
Suhu perkiraan ( K ) ..... = 300
```

Proses iterasi :

Suhu (K)	f(T)
300.0000	36.69714
318.3762	14.12097
338.3397	5.299244
358.7554	1.857138
376.5740	0.5416429
387.2348	9.645903E-02
390.0656	4.891873E-03
390.2246	2.026558E-05

Hasil hitungan:

```
Suhu embun = 390.2253 K
f(T) = -2.980232E-07
-- selesai --
```

Soal 2:

Reaksi eksotermis fasa gas $A + 2B \rightleftharpoons C$ dijalankan dalam reaktor adiabatik. Umpan berjumlah F_0 gmol/jam, bersuhu T_F , mempunyai komposisi: 25% A dan 75% B. Tekanan sepanjang reaktor dapat dianggap tetap P atm. Ingin dicari konversi A jika reaksi dianggap mencapai kesetimbangan (z).

Persamaan yang tersedia:

$$K = \frac{P_C}{P_A P_B^2}$$

$$K = A \cdot \exp \left[\frac{B}{T} \right] \quad \text{atau} \quad T = \frac{B}{\ln \frac{K}{A}} \quad (\text{kesetimbangan})$$

Diketahui data-data: $\Delta H_R^0 = -20000$ cal/gmol; $T_F = 400$ K; $P = 20$ atm; $T_{ref} = 298$ K; $A = 8 \times 10^{-6}$ atm; $B = 4500$ K; $C_{pA} = 7$; $C_{pB} = 8$; $C_{pC} = 12$ cal/mol/K.

Jawaban:

Dari stoikhiometri:

$$P_A = \frac{0,25(1-z)}{(1-0,5z)} P$$

$$P_B = \frac{(0,75 - 0,5z)}{(1 - 0,5z)} P$$

$$P_C = \frac{0,25z}{(1 - 0,5z)} P$$

Dari neraca panas:

$$T = T_F - \frac{0,25 z (\Delta H_R^F)}{0,25(1-z)C_{pA} + (0,75 - 0,5 z)C_{pB} + 25 z C_{pC}}$$

$$\Delta H_R^F = \Delta H_R^0 + (C_{pC} - C_{pA} - 2C_{pB})(T_F - T_{ref})$$

Konversi kesetimbangan dihitung menggunakan metode Newton-Raphson: $f(z) =$

$$T_{kesetimbangan} - T_{neraca panas} = 0.$$

Ambil harga-harga: $Z_{awal} = 0,1$; toleransi = 0,0001; $\varepsilon = 0,0001$

Langkah-langkah perhitungan untuk mencari $f(z)$ dari z :

1. Dari z menghitung P_A, P_B, P_C
2. Dari P_A, P_B, P_C , menghitung K
3. Dari K menghitung $T_{kesetimbangan}$
4. Dari z menghitung $T_{neraca panas}$
5. $f(z) = T_{kesetimbangan} - T_{neraca panas}$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

Suhu masuk (K) ..... = 400
Tekanan (atm) ..... = 20
Harga A (1/atm^2) ..... = 0.000008
Harga B (K) ..... = 4500
Kapasitas panas A (cal/gmol/K) ..... = 7
Kapasitas panas B (cal/gmol/K) ..... = 8
Kapasitas panas C (cal/gmol/K) ..... = 12
Entalpi reaksi pada suhu referensi (cal/gmol) = -20000
Suhu referensi (K) ..... = 298
Harga awal konversi ..... = 0.1
Toleransi konversi ..... = 0.0001
Interval untuk diferensiasi (K) ..... = 0.0001

```

Proses iterasi:

Konversi, z	f(z)
0.1	611.5717
0.2642891	234.5693
0.4026825	17.44849
0.4143224	2.587891E-02
0.4143397	6.103516E-05

Hasil hitungan :

```

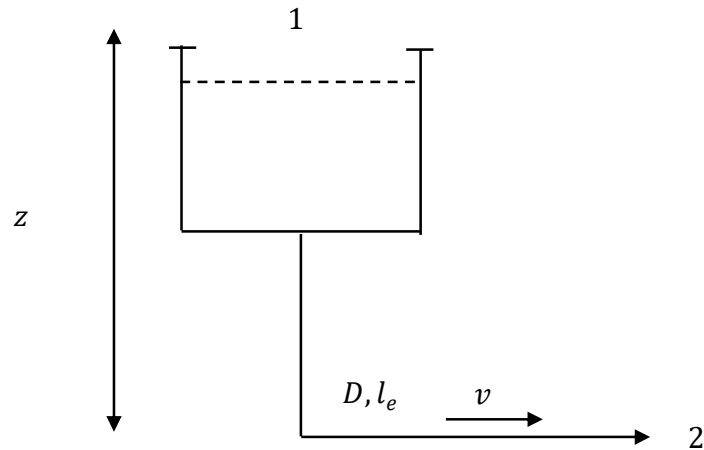
Konversi A = 0.4143397
Suhu gas (dari neraca panas) = 730.9733 K
Suhu gas (dari kesetimbangan) = 730.9733 K
Tetapan kesetimbangan = 3.772967E-03 1/atm^2
--selesai--

```

Soal 3:

Cairan dengan sifat-sifat fisis: rapat massa ρ , kekentalan μ , dialirkan dari tangki melalui pipa berdiameter D (Gambar 6.1). Tinggi permukaan cairan z . Ingin dicari kecepatan aliran, v , dan debit, Q . Hubungan antara f dengan Re mengikuti persamaan:

$$f = \frac{0,0596}{Re^{0,215}}$$



Gambar 6.1 Pengaliran cairan dari tangki secara gravitasi

Jawaban:

$$f(v) = z - \frac{f \cdot L_e \cdot v^2}{2g \cdot D} - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad (\text{dari persamaan Bernoulli})$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 v$$

Gunakan cara Newton-Raphson untuk mencari v yang memenuhi $f(v) = 0$.
Diketahui data-data: $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$; $\mu = 0,01 \text{ g/cm/detik}$; $g = 981 \text{ cm/detik}^2$; $z = 600 \text{ cm}$; $D = 3 \text{ cm}$; $L_e = 40000 \text{ cm}$.

Langkah-langkah hitungan mencari $f(v)$ dari v :

1. Dari v menghitung Q
2. Dari v menghitung Re
3. Dari Re menghitung f
4. Dari f dan v menghitung $f(v)$

Ambil: perkiraan kecepatan = 200 cm/detik;

Toleransi = 0.001 cm/detik dan $\varepsilon = 0,01$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:


```

Rapat massa cairan (g/cm3) ..... = 1
Viskositas cairan (g/cm/det) ..... = 0.01
Tinggi cairan (cm) ..... = 600
Diameter pipa (cm) ..... = 3
Panjang ekivalen pipa (cm) ..... = 40000
Percepatan gravitasi (cm/det^2) .... = 981
Kecepatan perkiraan (cm/det) ..... = 200
Toleransi kecepatan (cm/det) ..... = 0.01
Interval untuk diferensiasi (cm/det) = 0.01

```

proses iterasi :

vold (cm/det)	f(v)
200	-737.5728
138.2977	-91.55798
128.0517	-2.637251
127.7382	-1.961708E-03

Hasil hitungan :

```

-----
Kecepatan = 127.738 cm/detik
Debit      = 902.9264 cm3/detik
f(v)       = -3.814697E-05 cm/detik
--selesai--

```

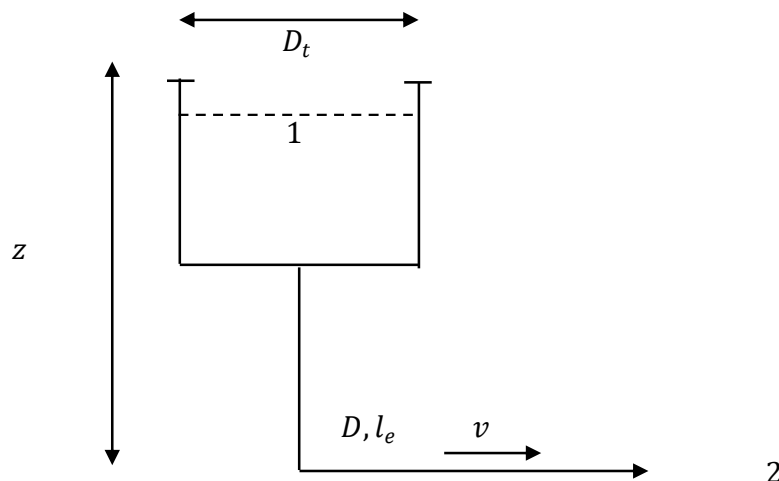
Soal 4 (lanjutan dari kasus 3):

Cairan dengan sifat-sifat fisis: rapat massa ρ , kekentalan μ , dialirkan dari tangki dengan aliran gravitasi melalui pipa berdiameter D (Gambar 6.2). Tinggi

permukaan cairan dalam tangki mula-mula Z_a . Diameter tangki D_t . Ingin dicari waktu pengosongan tangki (θ) sampai tinggi cairan akhir Z_f . Hubungan antara f dengan Re mengikuti persamaan:

$$f = \frac{0,0596}{Re^{0,215}}$$

Diketahui data-data: $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$; $\mu = 0,01 \text{ g/cm/det}$; $g = 981 \text{ cm/detik}^2$; $Z_a = 600 \text{ cm}$; $Z_f = 200 \text{ cm}$; $D = 3 \text{ cm}$; $Le = 40000 \text{ cm}$.



Gambar 6.2

Pengosongan tangki dengan aliran gravitasi

Jawaban:

$$\theta = \left[\frac{D_t}{D} \right]^2 \int_{z_f}^{z_a} (1/v) \cdot dz \quad (\text{dari neraca cairan dalam tangki})$$

$$f(v) = z - \frac{f \cdot Le \cdot v^2}{2g \cdot D} - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad (\text{dari persamaan Bernoulli})$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 v$$

Integrasi cara Simpson digunakan untuk menghitung waktu θ . Diperlukan harga $(1/v)$ pada berbagai z .

Struktur program komputer untuk komputasi ini adalah:

1. Program pokok: integrasi cara Simpson

2. *Subroutine*: masukan z , keluaran $(1/v)$

Isi: Newton-Raphson $f(v) = 0$

3. *Sub-Subroutine*:

Masukan v , keluaran $f(v)$

Langkah-langkah hitungan untuk mencari $f(v)$ dari v seperti pada kasus 3.

Ambil: Toleransi kecepatan = 0,001 cm/detik

Interval untuk diferensiasi, $\varepsilon = 0,01$

Jumlah interval = 10

Harga perkiraan kecepatan untuk setiap ketinggian, z , dihitung dengan persamaan

$$v = 0,4 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \text{ cm/detik}$$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Rapat massa cairan (g/cm3) ..... = 1
Viskositas cairan (g/cm/detik) ..... = 0.01
Percepatan gravitasi (g/detik2) ..... = 981
Tinggi permukaan cairan mula2 (cm) ... = 600
Tinggi permukaan cairan akhir (cm) ... = 200
Diameter tangki (cm) ..... = 200
Diameter pipa (cm) ..... = 3
Panjang ekivalen pipa (cm) ..... = 40000
Jumlah interval integrasi (genap) .... = 20
Toleransi kecepatan ..... = 0.01
Interval untuk diferensiasi ..... = 0.01
```

Data proses integrasi:

z, cm	v, cm/det	f(v)	1/v
600	119.5596	2.956391E-05	8.364031E-03
580	117.307	-6.437302E-05	8.524639E-03
560	115.0201	-5.340576E-05	8.694132E-03
540	112.6971	-1.401901E-04	8.873344E-03
520	110.336	1.306534E-04	9.06323E-03
500	107.9347	-1.950264E-04	9.264864E-03
480	105.4908	1.525879E-05	9.479499E-03
460	103.0019	-6.914139E-05	9.708563E-03
440	100.4649	8.630752E-05	9.953722E-03
420	97.87689	1.149178E-04	1.021692E-02
400	95.23416	1.654625E-04	1.050043E-02
380	92.53281	3.33786E-05	1.080698E-02
360	89.76826	6.055832E-05	1.113979E-02
340	86.93549	-2.384186E-06	1.150278E-02
320	84.02853	8.010865E-05	1.190072E-02
300	81.04072	-4.291535E-05	1.233948E-02
280	77.9641	4.1008E-05	1.282642E-02
260	74.78941	3.385544E-05	1.337088E-02
240	71.50558	-8.654594E-05	1.398492E-02
220	68.09924	3.027916E-05	1.468445E-02
200	64.554	1.764298E-05	1.549091E-02

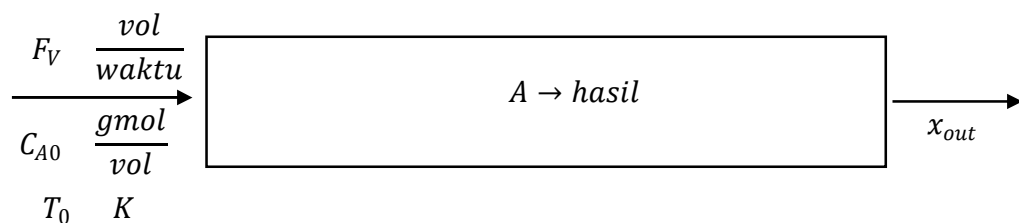
Hasil perhitungan:

Waktu pengaliran = 19440.36 detik
 = 324.006 menit

--selesai--

Soal 5:

Reaktor *plug flow* beroperasi adiabatik digunakan untuk reaksi fasa cair: $A \rightarrow$ produk (Gambar 6.3).



Gambar 6.3 Reaktor *plug flow* adiabatik

Reaksi order 2 eksotermis. Perubahan entalpi reaksi, ΔH_R , nilainya dianggap tetap. Hubungan tetapan kecepatan reaksi (k) dengan suhu (T) mengikuti persamaan:

$$k = A \cdot \exp \left[-\frac{E}{RT} \right]$$

Diketahui: $F_v = 200$ L/menit; $C_{A0} = 5$ gmol/L; $\rho = 1,1$ kg/L; $C_p = 0,8$ kcal/kg/K; $A = 3,12 \times 10^8$ L/gmol/menit; $E = 18600$ cal/gmol; $\Delta H_R = -15$ kcal/gmol; $R = 1,987$ cal/gmol/K; dan volum reaktor, $Vol = 8000$ L. Ingin dicari suhu masuk T_0 , yang memberikan konversi keluar $x_{out} = 0,8$. Pakailah cara Newton-Raphson: $f(T_0) = V - Vol = 0$, untuk mencari T_0 yang sesuai. Gunakan metode Simpson untuk menghitung V .

Jawaban:

$$V = \frac{F_v}{C_{A0}} \int_{x_{in}}^{x_{out}} \frac{1}{k(1-x)^2} dx \quad (\text{dari neraca massa A})$$

$$T = T_0 - \frac{C_{A0} \Delta H_R}{\rho \cdot C_p} x \quad (\text{dari neraca panas})$$

Struktur program komputer untuk mencari T_0 adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: Newton-Raphson
 $f(T_0) = V - Vol = 0$
2. *Subroutine*: Integrasi Simpson (menghitung V)
3. *Sub-subroutine*: menghitung $\frac{1}{(1-x)^2}$ dari x

Ambil: Jumlah interval = 40

Harga awal iterasi, $T_0 = 300$ K

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

Kecepatan volumetrik umpan (l/menit) ..... = 200
Konsentrasi A masuk (gmol/L) ..... = 5
Rapat massa (kg/L) ..... = 1.1
Kapasitas panas campuran (kcal/kg/K) ..... = 0.8
Faktor frekuensi tumbukan (l/gmol/menit) ... = 3.12E+08
Tenaga aktivasi (cal/gmol) ..... = 18600
Perubahan entalpi reaksi (kcal/gmol) ..... = -15
Konstanta gas umum (cal/gmol/k) ..... = 1.987
Volum reaktor (liter) ..... = 8000
Toleransi suhu (K) ..... = 0.01
Interval diferensiasi (K) ..... = 0.01
Trial awal suhu masuk (K) ..... = 300
Konversi A masuk reaktor ..... = 0
Konversi A keluar reaktor ..... = 0.8
Jumlah interval integrasi ..... = 40

```

Proses iterasi:

To (K)	f (To)
300.0000	811141.6
310.5777	307862.6
321.8007	115758.0
333.4315	42353.88
344.7235	14383.36
353.9938	3989.097
359.0703	641.9493
360.2389	25.72559
360.2897	5.810547E-02

Hasil hitungan:

Suhu masuk reaktor = 360.2897
 f(T) = 5.810547E-02
 --selesai--

Soal 6:

Butir-butir padatan A berjumlah N_b dengan rapat massa ρ g/cm³, jari-jari awal R_0 cm, dimasukkan dalam W g solven. Padatan A melarut dengan panas pelarutan sebesar λ cal/g. Kelarutan A dalam solven pada berbagai suhu (K) mengikuti persamaan:

$$x_s \left[\frac{g A}{g solven} \right] = \exp \left[8,8053 - \frac{3333}{T} \right]$$

Kapasitas panas campuran dianggap tetap C_p cal/g/K dan panas hilang ke sekeliling diabaikan. Koefisien perpindahan massa padat-cair k_x g solven/detik/cm² (dianggap tetap). Hitung suhu awal agar dalam waktu θ detik semua padatan tepat habis melarut. Diketahui data-data $N_b = 40000$; $\rho_s = 2$; $R_0 = 0,5$; $W = 100000$; $\lambda = 100$; $C_p = 1,0$; $k_x = 0,01$; $\theta = 200$.

Jawaban:

$$\theta = \frac{\rho_s}{k_x} \int_0^{R_0} \frac{dr}{(x_s - x)} \quad (\text{dari neraca padatan A})$$

(disebut θ_{calc})

$$x = \frac{m_0 - m}{W}$$

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_s \cdot N_b$$

$$T = T_0 + \frac{\lambda(m_0 - m)}{(W + m_0)C_p} \quad (\text{dari neraca panas})$$

Gunakan cara Newton-Raphson: $f(T_0) = \theta - \theta_{calc} = 0$, untuk mencari T_0 dan cara Simpson untuk menghitung θ_{calc}

Struktur program komputer untuk soal ini adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: Newton-Rampson

$$f(T_0) = \theta - \theta_{calc} = 0$$

2. *Subroutine*: menghitung $f(T_0)$ dari T_0

Isi: integrasi cara Simpson untuk menghitung θ_{calc}

3. *Sub-subroutine*: menghitung $\frac{1}{(x_s - x)}$ dari r

Ambil: Harga awal $T_0 = 300\text{K}$

Toleransi $T_0 = 0,0001\text{K}$

Interval untuk diferensiasi, $\varepsilon = 0,0001\text{ K}$

Jumlah interval untuk integrasi = 40

$$\pi = 3.14159$$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

Jumlah butir ..... = 40000
Density padatan , g/cm3 ..... = 2
Jari-jari butir mula-mula , cm ..... = 0.5
Massa solven , g ..... = 100000
Kapasitas panas rata-rata campuran , cal/gram/K ... = 1
Panas pelarutan , cal/g ..... = 100
Koefisien tr. massa padat-cair , g solven/cm2/detik = 0.01
Waktu pelarutan , detik ..... = 200
Suhu mula-mula perkiraan , K ..... = 330
Toleransi suhu, K ..... = 0.0001
Interval diferensiasi , K ..... = 0.0001
Jumlah inkremen integrasi (genap ) ..... = 40

```

Proses iterasi:

```

-----
      Suhu awal (K)      ftp (detik)
      -----
          330              271.9888
        338.0293          98.50613
        344.485           23.31725
        346.8003           3.408203
        347.2609          -.2255402
        347.2345          -.0199585
        347.2318           1.26648E-03
        347.2319           3.051758E-05
      -----

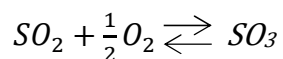
```

Suhu mula-mula campuran = 347.2319 K

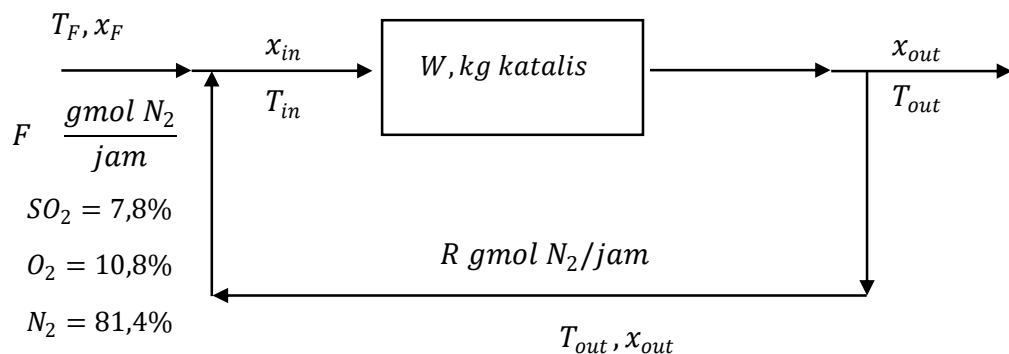
--selesai--

Soal 7:

Reaksi asa gas bolak-balik eksotermis:



dijalankan dalam reaktor tabung adiabatik yang berisi butir-butir katalisator (lihat Gambar 6.4). Pada gambar, x adalah konversi SO_2 . Aliran dianggap *plug-flow* dan tekanan sistem dianggap tetap 1 atm. Umpan segar berjumlah 55000 kg/jam.



Gambar 6.4 Reaktor *plug-flow* adiabatik dengan sebagian hasil direcycle

Kecepatan reaksi mengikuti persamaan:

$$r \left[\frac{\text{gmol SO}_2}{\text{jam x kg katalis}} \right] = \frac{k_1 \cdot P_{O_2} \cdot P_{SO_2} \left[1 - \frac{P_{SO_3}}{P_{SO_2} \cdot P_{O_2}^{1/2} \cdot K_p} \right]}{22,414(1 + k_2 \cdot P_{SO_2} + k_3 \cdot P_{SO_3})^2}$$

dengan:

$$k_1 = \exp \left[12,16 - \frac{5473}{T} \right]$$

$$K_2 = \exp \left[-9,953 + \frac{8619}{T} \right]$$

$$K_3 = \exp \left[-71,745 + \frac{52596}{T} \right]$$

$$K_p = \exp \left[-10,68 + \frac{11300}{T} \right]$$

Ingin dicari harga (R/F) yang memberikan W minimum.

Diketahui data-data: $X_F = 0$; $X_{out} = 0,64$; $T_F = 660$ K. (X = konversi SO_2)

Jawaban:

$$W = 137,3 \left[1 + \frac{R}{F} \right] \int_{x_{in}}^{x_{out}} \frac{1}{r} dx \quad (\text{diperoleh dari neraca massa } SO_2 \text{ dalam reaktor})$$

$$x_{in} = \frac{x_F + \left[\frac{R}{F} \right] x_{out}}{1 + \left[\frac{R}{F} \right]} \quad (\text{dari neraca massa } SO_2 \text{ dan neraca massa } N_2 \text{ pada}$$

pencampuran)

$$T = T_F + 241,7 \cdot (x - x_F) \quad (\text{dari neraca panas})$$

Sedangkan persamaan-persamaan stoikiometris menghasilkan:

$$P_{SO_2} = \frac{1-x}{12,82-0,5x}$$

$$P_{SO_2} = \frac{1,3846-0,5x}{12,82-0,5x}$$

$$P_{SO_3} = \frac{x}{12,82-0,5x}$$

Dilakukan minimasi $W = f(R/F)$ dengan cara golden-section.

Gunakan cara Simpson untuk menghitung W .

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: minimasi golden-section $W = f(R/F)$
2. *Subroutine*: integrasi cara Simpson menghitung W
3. *Sub-subroutine*: menghitung $\frac{1}{r}$ dari x

Ambil: Batas bawah (R/F) = 0,1

Batas atas (R/F) = 12,5

Toleransi interval = 0,01

Jumlah interval integrasi Simpson = 40

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Konversi umpan segar ..... = 0
Suhu umpan segar ..... = 660
Konversi keluar ..... = 0.64
Batas bawah R/F ..... = 0.1
Batas atas R/F ..... = 12.5
Toleransi interval ..... = 0.01
Jumlah interval integrasi simpson = 40
```

Proses minimasi:

(R/F) a	(R/F) b	(W) a	(W) b
0.1	12.5	13148.65	4823.401
0.1	7.763622	13148.65	4703.44
0.1	4.836378	13148.65	4582.977
0.1	3.027243	13148.65	4495.097
1.218107	3.027243	4591.618	4495.097
1.909136	3.027243	4483.095	4495.097
1.909136	2.600164	4483.095	4480.569
2.173085	2.600164	4476.135	4480.569
2.173085	2.437034	4476.135	4477.242
2.173085	2.336215	4476.135	4476.095
2.235395	2.336215	4475.809	4476.095
2.235395	2.297705	4475.809	4475.875
2.235395	2.273904	4475.809	4475.807
2.250104	2.273904	4475.793	4475.807
2.250104	2.264814	4475.793	4475.794
2.250104	2.259195	4475.793	4475.789

Hasil hitungan :

```
(R/F) optimum = 2.25465
W minimum     = 4475.789 kg
xin = 0.4433583
Tin = 767.1597 K
Tout = 814.688 K
--selesai--
```

Soal 8:

Reaktor *batch* beroperasi secara adiabatik untuk reaksi fasa cair order 2: $A \rightarrow B$, dengan persamaan kecepatan reaksi:

$$r_A = k \cdot C_A^2$$

dengan

$$k = A \cdot \exp \left[-\frac{E}{RT} \right]$$

Perubahan entalpi reaksi (ΔH_R), volum reaktor (V_R) dan kapasitas panas larutan, (C_p) dianggap tetap. Waktu untuk bongkar pasang t_p . Umpan masuk pada suhu T_f dan konsentrasi $A = C_{Ao}$. Reaksi dihentikan pada saat konversi X_R . Konversi A mula-mula X_{Ro} . Ingin dicari konversi A yang memberikan kecepatan produksi B tiap waktu maksimum. Diketahui $V_R = 10000$ L; $C_{Ao} = 1$ gmol/L; $\rho = 1$ kg/L; $C_p = 1,0$ kcal/kg/K; $A = 1,0 \times 10^7$ L/gmol/menit; $E = 14$ kcal/gmol; $\Delta H_R = -6$ kcal/gmol; $R = 0,001987$ kcal/gmol/K; $T_f = 350$ K; $t_p = 120$ menit; $X_{Ro} = 0$.

Jawaban:

$$t_R = \frac{1}{C_{Ao}} \int_{X_{Ro}}^{X_R} \frac{1}{k(1-X_A)^2} dX_A \quad (\text{diperoleh dari neraca massa A})$$

$$k = A \cdot \exp \left[-\frac{E}{RT} \right] \quad (\text{diketahui})$$

$$T = T_f - \frac{C_{Ao} \cdot \Delta H_R}{\rho \cdot C_p} X_A \quad (\text{diperoleh dari neraca panas})$$

$$\text{Produksi B tiap batch} = V_R \cdot C_{Ao} \cdot X_R$$

$$\text{Kecepatan produksi B} = V_R \frac{C_{Ao} \cdot X_R}{t_R + t_p} \quad (\text{diinginkan maksimum}).$$

Maksimasi kecepatan produksi $B = f(X_R)$ dengan cara golden-section. Gunakan cara Simpson untuk menghitung t_R .

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: maksimasi B dengan *golden-section*.
2. *Subroutine*: menghitung B dari X_R

Isi: menghitung t_R dengan cara Simpson

$$\text{menghitung kecepatan produksi B} = V_R \cdot (C_{Ao} \cdot X_R) / (t_R + t_p)$$

3. *Sub-subroutine*: menghitung $\frac{1}{k(1-X_A)^2}$ dari X_A .

Ambil: Jumlah interval = 40

Batas bawah konversi, $X_{RA} = 0,2$

Batas bawah konversi, $X_{RB} = 0,99$

Toleransi = 0,001

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Volum reaktor (L) ..... = 10000
Suhu umpan (K) ..... = 350
Konsentrasi A dalam umpan (gmol/L) ..... = 1
Frekuensi tumbukan (L/gmol/menit) ..... = 1E+07
Tenaga aktivasi (kcal/gmol) ..... = 14
Perubahan entalpi reaksi (kcal/gmol) ..... = -6
Rapat massa campuran (kg/L) ..... = 1
Kapasitas panas campuran (kcal/kg/K) ..... = 1
Tetapan gas (kcal/gmol/K) ..... = 0.001987
Konversi awal ..... = 0
Waktu bongkar pasang (menit) ..... = 120
Batas bawah interval xr ..... = 0.2
Batas atas interval xr ..... = 0.99
```

```
Interval akhir ..... = 0.001
Jumlah interval konversi untuk integrasi (genap) = 20
```

(xr)a	(xr)b	f[(xr)a]	f[(xr)b]
0.2	0.99	15.00089	1.269021
0.5017532	0.99	29.48696	1.269021
0.5017532	0.8035063	29.48696	26.37966
0.5017532	0.6882469	29.48696	30.71296
0.5729875	0.6882469	30.87898	30.71296
0.5729875	0.6442218	30.87898	31.18092
0.6001966	0.6442218	31.13516	31.18092
0.6170126	0.6442218	31.20881	31.18092
0.6170126	0.6338288	31.20881	31.21378
0.6234358	0.6338288	31.21902	31.21378
0.6234358	0.629859	31.21902	31.219
0.6234358	0.6274056	31.21902	31.22022
0.6249521	0.6274056	31.21995	31.22022
0.6258893	0.6274056	31.22022	31.22022
0.6264685	0.6274056	31.22028	31.22022

Hasil hitungan:

```
-----
Konversi keluar optimum = 0.6269371
Kecepatan produksi B    = 31.22028   gmol/menit
Waktu reaksi             = 80.81082   menit
--selesai--
```

Soal 9:

Pada suhu 350 K, campuran biner bahan A dan B, fasa uapnya mengikuti hukum-hukum gas ideal sedangkan fasa cairnya non-ideal dengan koefisien aktivitas mengikuti persamaan:

$$\gamma_A = \exp(\beta \cdot x_B^2)$$

$$\gamma_B = \exp(\beta \cdot x_A^2)$$

Pada 350 K, tekanan uap murni A dan B masing-masing 80 cmHg dan 60 cmHg. Data tekanan total kesetimbangan pada 350 K pada berbagai fraksi mol A adalah:

x_A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9
P_t (cmHg)	65,8	70,3	73,9	76,5	79,9	80,9	81,3	81,0

Berdasar data-data tersebut, perkiraan harga β dan berdasarkan harga β tersebut hitung nilai-nilai y_A dan P_t serta bandingkan hasilnya dengan data percobaan (P_t). Gunakan cara golden-section untuk mencari β yang memberikan

$$S = f(\beta) = \sum [(P_t)_{calc} - (P_t)_{exp}]^2$$

minimum.

Jawaban:

$$y_A \cdot P_t = \gamma_A \cdot x_A \cdot P_A^o$$

$$y_B \cdot P_t = \gamma_B \cdot x_B \cdot P_B^o$$

$$(y_A + y_B) \cdot P_t = \gamma_A \cdot x_A \cdot P_A^o + \gamma_B \cdot x_B \cdot P_B^o$$

$$P_t = x_A \cdot P_A^o \cdot \exp[\beta(1 - x_A)^2] + (1 - x_A) \cdot P_B^o \cdot \exp(\beta \cdot x_A^2)$$

Struktur program komputernya adalah:

1. Program pokok: minimasi golden-section $S = f(\beta)$
2. *Subroutine*: menghitung S dari β

Ambil: $\beta_A = 0,1$; $\beta_B = 0,7$; toleransi = 0,0001

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

Suhu (K) = 350

Tekanan uap murni komponen A (P_{Ao} , cmHg) = 80

Tekanan uap murni komponen B (P_{Bo} , cmHg) = 60

Data hubungan tek. total (P_t , cmHg) dengan fraksi mol A (x_A)

Jumlah data = 8

$x_A(1) = 0.1$

$P_t(1) = 65.8$

$x_A(2) = 0.2$

$P_t(2) = 70.3$

$x_A(3) = 0.3$

$P_t(3) = 73.9$

$x_A(4) = 0.4$

$P_t(4) = 76.5$

$x_A(5) = 0.6$

$P_t(5) = 79.9$

$x_A(6) = 0.7$

$P_t(6) = 80.9$

$x_A(7) = 0.8$

$P_t(7) = 81.3$

$x_A(8) = 0.9$

$P_t(8) = 81$

Optimasi beta dengan golden-section

Batas bawah beta (beta-A) = 0.1

Batas atas beta (beta-B) = 0.7

Ketelitian beta = 0.0001

(beta)A	(beta)B	(SSE)A	(SSE)B
0.100000	0.7000000	213.40970000	123.9413000000
0.329180	0.7000000	30.39338000	123.9413000000
0.329180	0.5583592	30.39338000	19.9909200000
0.416718	0.5583592	3.29201000	19.9909200000
0.416718	0.5042573	3.29201000	4.1264650000
0.416718	0.4708204	3.29201000	0.3140365000
0.437384	0.4708204	0.85656620	0.3140365000
0.450155	0.4708204	0.14670970	0.3140365000
0.450155	0.4629270	0.14670970	0.0561046000
0.455034	0.4629270	0.03847747	0.0561046000
0.455034	0.4599121	0.03847747	0.0211333000
0.456897	0.4599121	0.02109326	0.0211333000
0.456897	0.4587604	0.02109326	0.0170020900
0.457609	0.4587604	0.01796021	0.0170020900
0.458049	0.4587604	0.01699309	0.0170020900
0.458049	0.4584886	0.01699309	0.0167695300
0.458217	0.4584886	0.01682023	0.0167695300
0.458321	0.4584886	0.01676749	0.0167695300
0.458321	0.4584244	0.01676749	0.0167566400
0.458360	0.4584244	0.01675835	0.0167566400

Hasil hitungan:

(beta)opt = 0.458392

(SSE)opt = 0.016756

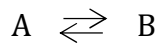
xA	yA	(Pt) calc	(Pt) data	Ralat, %
0.10000	0.17612	65.845	65.800	0.068
0.20000	0.30500	70.343	70.300	0.062
0.30000	0.40703	73.813	73.900	0.118
0.40000	0.49347	76.481	76.500	0.025
0.60000	0.64599	79.959	79.900	0.074
0.70000	0.72144	80.892	80.900	0.010
0.80000	0.80202	81.276	81.300	0.030
0.90000	0.89266	81.028	81.000	0.035

Penyimpangan rata-rata = 0.0527 %

--selesai--

Soal 10:

Reaksi fasa cair bolak-balik eksotermis:



dijalankan dalam reaktor *batch* adiabatik. Volum campuran dapat dianggap tetap.

Suhu awal reaktor T_o . Kecepatan reaksi mengikuti persamaan:

$$r_A = k. [C_A - K C_B]$$

dengan:

$$k = A. \exp \left[-\frac{E}{RT} \right]$$

$$K = \alpha. \exp \left[\frac{\beta}{T} \right]$$

Panas reaksi λ kal/gmol, rapat massa campuran ρ g/L, kapasitas panas campuran C_p cal/g/K. Konsentrasi A mula-mula C_{Ao} gmol/L dan konversi awal x_o . Konversi akhir yang diinginkan x_N . Ingin dicari suhu awal yang memberikan waktu reaksi minimum. Diketahui: $A = 25$; $E = 10000$; $R = 1,987$; $\alpha = 1750$; $\beta = -5000$; $\lambda = -80000$; $\rho = 1100$; $C_p = 1,2$; $C_{Ao} = 1$, $x_o = 0$; $x_N = 0,3$.

Jawaban:

$$t = \int_{x_o}^{x_N} \frac{dx}{k.[(1-x)-K.x]} \quad (\text{dari neraca massa A})$$

$$T = T_o + \frac{\lambda C_{Ao}}{\rho C_p} (x - x_o) \quad (\text{dari neraca panas})$$

Gunakan metoda *golden-section* untuk mencari T_o yang memberikan $t = f(T_o)$ minimum, sedangkan t dihitung dengan integrasi cara Simpson.

Struktur program komputernya adalah:

1. Program pokok: minimasi *golden-section*

$$t = f(T_o)$$

2. *Subroutine*: masukan T_o , keluaran t

Isi: integrasi Simpson untuk t

3. *Sub-subroutine*: menghitung $\frac{1}{k((1-x)-Kx)}$ dari x.

Ambil: Jumlah interval integrasi= 20

Batas bawah suhu awal $T_{oA} = 400$

Batas atas suhu awal $T_{oB} = 570$

Toleransi = 0,1

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

Frekuensi tumbukan reaksi ..... = 25
Tenaga aktivasi reaksi (cal/gmol) ..... = 10000
Konstanta gas umum (cal/gmol/K) ..... = 1.987
Alpha ..... = 1750
Beta ..... = -5000
Perubahan entalpi reaksi (cal/gmol) ..... = -80000
Rapat massa larutan (g/L) ..... = 1100
Kapasitas panas larutan (cal/g/K) ..... = 1.2
Konsentrasi A mula2 (gmol/L) ..... = 1
Konversi awal ..... = 0
Konversi akhir ..... = 0.3

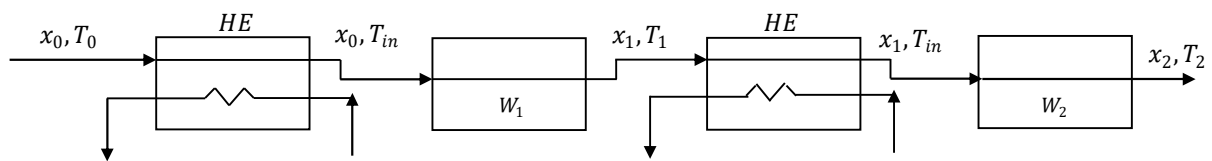
Jumlah interval integrasi ..... = 20
Batas bawah T0 (K) ..... = 400
Batas atas T0 (K) ..... = 570
Toleransi suhu ..... = 0.1

(T0) -A      (T0) -B      (wkt) -A      (wkt) -B
-----
400          570          769.1893      54.29207
464.9342     570          184.1357      54.29207
505.0658     570          94.81647      54.29207
529.8685     570          68.05571      54.29207
545.1973     570          57.57672      54.29207
554.6711     570          53.12299      54.29207
560.5263     570          51.37346      54.29207
560.5263     566.3814      51.37346      51.23524
562.7627     566.3814      51.03234      51.23524
562.7627     564.9991      51.03234      51.00271
563.617      564.9991      50.97565      51.00271
563.617      564.4712      50.97565      50.97248
563.9433     564.4712      50.9675       50.97248
563.9433     564.2696      50.9675       50.96779
563.9433     564.1449      50.9675       50.96664
564.0203     564.1449      50.9668       50.96664
564.0679     564.1449      50.96657      50.96664
-----
Hasil hitungan :
-----
(T0) opt     = 564.1064 K
(Waktu) min  = 50.96657 menit
--selesai--

```

Soal 11:

Reaksi endotermis order 1 fasa gas: $A \rightarrow B + C$, dijalankan dengan katalisator padat dalam 2 reaktor adiabatik yang disusun seri (Gambar 6.5). Suhu umpan masuk ke reaktor-reaktor dijaga T_{in} dengan *preheater* dan *inter-heater*. Umpan reaktor 1 berupa A murni sebanyak F_{Ao} . Tekanan reaktor-reaktor dianggap tetap P . Aliran gas dianggap plug flow. Carilah konversi antara yang memberikan berat katalisator ($W = W_1 + W_2$) minimum. Gunakan cara Simpson untuk menghitung W_1 dan W_2 dan cara *golden-section* untuk minimasi berat katalisator total.



Gambar 6.5 Susunan reaktor seri dengan *pre-heater* dan *inter-heater*

Diketahui data-data:

$$k \left[\frac{1}{\text{detik} \times \text{kg kat}} \right] = 2,5 \times 10^{16} \exp \left[\frac{-33000}{T} \right]$$

$$\Delta H_R^0 = 2000 \frac{\text{cal}}{\text{gmol}}; \text{ suhu referensi, } T_R = 298 \text{ K}; R = 0,082 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{gmol} \cdot \text{K}};$$

$$x_o = 0; x_2 = 0,6; F_{Ao} = 10 \text{ gmol/detik}; T_{in} = 1200 \text{ K}; P = 2 \text{ atm};$$

$$Cp_A \left[\frac{\text{cal}}{\text{gmol} \cdot \text{K}} \right] = 4; Cp_B = 5,5; Cp_C = 7$$

Jawaban:

$$W_i = F_{Ao} \int_{x_{in}}^{x_{out}} \frac{dx}{r_A} \quad (i = 1, 2) \quad (\text{dari neraca massa A pada reaktor ke-i})$$

$$r_A = \frac{k \cdot P}{R \cdot T} \left[\frac{1-x}{1+x} \right] \quad (\text{stoikhiometri})$$

$$T = T_R - \frac{[(1-x_{in}) Cp_A + x_{in} (Cp_B + Cp_C)] \cdot (T_R - T_{in}) + (x - x_{in}) \cdot \Delta H_R^0}{(1-x) Cp_A + x (Cp_B + Cp_C)}$$

(dari neraca panas tiap reaktor)

Dalam hal ini x_{in} dan x_{out} adalah konversi A pada saat masuk dan keluar reaktor-reaktor (x_{in} pada reaktor 1 dan 2 berbeda, demikian pula x_{out})

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: minimasi *golden-section*

$$W = W_1 + W_2 = f(x_1)$$

2. *Subroutine*: masukan x_1 , keluaran W

Isi: Integrasi cara Simpson menghitung W_1

Integrasi cara Simpson menghitung W_2

$$W = W_1 + W_2$$

3. *Sub-subroutine*: masukan x , keluaran $(1/r_A)$

Ambil: Jumlah interval integrasi = 40

Batas bawah optimasi = 0,1

Batas atas optimasi = 0,5

Toleransi = 0,0001

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

Kecepatan umpan masuk (gmol/detik) = 10			
(x1) -A	(x1) -B	W(x1-A)	W(x1-B)
-----	-----	-----	-----
0.1000	0.5000	2.665698E+6	1.273944E+8
0.1000	0.3472	2.665698E+6	44501.730
0.1944	0.3472	5562.111	44501.730
0.1944	0.2889	5562.111	2081.188
0.2305	0.2889	883.661	2081.188
0.2305	0.2666	883.661	756.322
0.2443	0.2666	585.084	756.322
0.2443	0.2580	585.084	597.000
0.2443	0.2528	585.084	558.860
0.2475	0.2528	562.276	558.860
0.2495	0.2528	556.131	558.860
0.2495	0.2515	556.131	555.968
0.2503	0.2515	555.364	555.968
0.2503	0.2511	555.364	555.468
0.2503	0.2508	555.364	555.326
0.2505	0.2508	555.311	555.326
0.2505	0.2507	555.311	555.304
0.2506	0.2507	555.302	555.304
0.2506	0.2506	555.302	555.302
-----	-----	-----	-----
Hasil hitungan:			

Konveersi antara (x1)-optimum = 0.2506			
Berat katalisator (minimum) = 555.2995 kg			
--selesai--			

Soal 12:

Diketahui data hubungan antara $\frac{A}{NkT}$ versus ρ^* pada $T^* = 3,5$;

ρ^*	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\frac{A}{NkT}$	-0,015	-0,041	-0,019	0,151	0,611	1,58

Ingin dicari harga-harga $P^* = \rho^* T^* \left[1 + \rho^* \frac{\partial}{\partial \rho^*} \left(\frac{A}{NkT} \right) \right]$ pada berbagai ρ^* yang ada pada data.

Dalam hal ini T^* adalah suhu tidak berdimensi, ρ^* adalah rapat massa tidak berdimensi, dan P^* adalah tekanan tidak berdimensi, yang sering digunakan dalam termodinamika statistis.

Hubungan $\frac{A}{NkT}$ dengan ρ^* didekati dengan polinomial:

$$\frac{A}{NkT} = c_0 + c_1 \rho^* + c_2 (\rho^*)^2 + c_3 (\rho^*)^3 + \dots + c_n (\rho^*)^n = \sum_{i=0}^n c_i (\rho^*)^i$$

Kemudian dilakukan diferensiasi analitis:

$$\frac{\partial}{\partial \rho^*} \left(\frac{A}{NkT} \right) = \sum_{i=0}^n i \cdot c_i (\rho^*)^{i-1}$$

Hasil program komputernya adalah sebagai berikut:

Data-data pada $T^* = 3.5$

Rho*	A/NkT
0.2	-0.015
0.4	-0.041
0.6	-0.019
0.8	0.151
1.0	0.611
1.2	1.580

Order polinomial = 4

Koefisien-koefisien polinomial:

$A(0) = 0.0328449$
 $A(1) = -0.3132724$
 $A(2) = 0.5608364$
 $A(3) = -1.240683$
 $A(4) = 1.571802$

No.	Rho*	(A/NkT) data	(A/NkT) calc	P*
1	0.20	-0.0150	-0.0148	0.6737
2	0.40	-0.0410	-0.0419	1.3677
3	0.60	-0.0190	-0.0175	2.5761
4	0.80	0.1510	0.1497	5.9831
5	1.00	0.6110	0.6115	15.3075
6	1.20	1.5800	1.5799	37.1479

--selesai--

Soal 13:

Sebuah tabung pitot dipakai untuk mengukur kecepatan lokal cairan yang mengalir dalam anulus dengan jari-jari dalam R_1 dan jari-jari luar R_2 . Beda tekanan diukur dengan manometer air raksa. Beda tinggi kolom air raksa terbaca h . Ingin dicari debit aliran (Q).

Data pengukuran:

r, cm	10	12	12,5	13	14	15	16	17
h, cm Hg	0	1,21	1,61	1,97	2,44	2,53	2,23	1,64

r, cm	17,5	18	20
h, cm Hg	1,28	0,92	0

Diketahui: $R_1 = 10$ cm; $R_2 = 20$ cm; $\rho = 1$ g/cm³(cairan); $\rho_{Hg} = 13,6$ g/cm³ (air raksa) dan $g = 981$ cm/detik².

Rumus tabung pitot untuk menghitung kecepatan aliran (v) dari h adalah:

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho) \cdot g \cdot h}{\rho}}$$

Debit cairan dihitung dengan persamaan:

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} y \cdot dr$$

dengan $y = (r \cdot v)$ (silahkan dijabarkan sendiri)

Hubungan antara $y = (r \cdot v)$ dengan r didekati dengan polinomial:

$$r \cdot v = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_k r^k$$

Gunakan rumus untuk menghitung tetapan polinomial dengan cara kuadrat terkecil kemudian lakukan integrasi analitis. Selain itu debit dihitung pula dengan integrasi analitis (lihat contoh pada subbab 5.4)

Hasil program komputernya adalah sebagai berikut:

Rapat massa air (g/cm^3) = 1
Rapat massa air raksa (g/cm^3) = 13.6
Percepatan gravitasi (cm^2/det) = 981
Jari-jari dalam pipa, R1 (cm) = 10
Jari-jari luar pipa, R2 (cm) = 20

Jumlah data = 11

Jari-jari ke- 1 , cm = 10
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 0
Jari-jari ke- 2 , cm = 12
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 1.21
Jari-jari ke- 3 , cm = 12.5
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 1.61
Jari-jari ke- 4 , cm = 13
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 1.97
Jari-jari ke- 5 , cm = 14
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 2.44
Jari-jari ke- 6 , cm = 15
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 2.53
Jari-jari ke- 7 , cm = 16
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 2.23
Jari-jari ke- 8 , cm = 17
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 1.64
Jari-jari ke- 9 , cm = 17.5
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 1.28
Jari-jari ke- 10 , cm = 18
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 0.92
Jari-jari ke- 11 , cm = 20
Selisih tinggi air raksa, cmHg = 0

Order polinomial = 3

Koefisien-koefisien polinomial:

A(0)= -9939.305
A(1)= 155.6983
A(2)= 150.6021
A(3)= -6.677406

No.	r, cm	h, cmHg	v, cm/det	(r.v) data	(r.v) calc
1	10.00	0.00	0.0000	0.0000	0.4800
2	12.00	1.21	172.9528	2075.4330	2077.2160
3	12.50	1.61	199.5021	2493.7760	2496.6900
4	13.00	1.97	220.6825	2868.8730	2866.2630
5	14.00	2.44	245.6008	3438.4110	3435.6780
6	15.00	2.53	250.0892	3751.3390	3745.3930
7	16.00	2.23	234.7940	3756.7040	3755.3460
8	17.00	1.64	201.3524	3422.9910	3425.4730
9	17.50	1.28	177.8851	3112.9900	3120.5780
10	18.00	0.92	150.8095	2714.5710	2715.7070
11	20.00	0.00	0.0000	0.0000	-3.7539

Penyimpangan rata-rata = 2.98038
 Debit air dlm annulus = 156852.6 cm³/detik
 --selesai--

Soal 14:

Sejumlah N pabrik dengan posisi koordinat masing-masing (x_i, y_i) menghasilkan limbah sejumlah masing-masing Q_i (volum/waktu). Akan dibangun suatu unit pengolahan limbah terpadu untuk seluruh pabrik tersebut. Ongkos transportasi limbah berbanding lurus dengan debit pangkat 0,6 dan jarak pangkat 1.

$$\text{Ongkos} = k \cdot (\text{jarak}) \cdot (\text{debit})^{0,6}$$

Ambil $k = 1$. Ingin dicari letak unit pengolah (x_p, y_p) yang memberikan ongkos transportasi total minimum.

Data:

pabrik no.	x_i	y_i	Q_i
1	0	0	500
2	700	0	400
3	0	800	700
4	600	250	600
5	500	300	300

Jawaban:

$$\text{Ongkos, } C = \sum_{i=1}^N \left[\left((x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2 \right)^{0,5} \cdot Q_i^{0,6} \right] = f(x_p, y_p)$$

Minimasi C dengan variabel bebas x_p dan y_p dijalankan menggunakan cara Hooke-Jeeves.

Ambil: $\Delta x_p = 100$; $\Delta y_p = 100$; toleransi $x_p = 0,001$; toleransi $y_p = 0,001$;

perbandingan $(\Delta)_{baru}$ dengan $(\Delta)_{lama} = 0,6$; $(x_p)_{awal} = 200$; $(y_p)_{awal} = -50$

Keluaran hasil program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Jumlah sumber limbah = 5
Sumber nomor : 1
    x = 0
    y = 0
    debit = 500
Sumber nomor : 2
    x = 700
    y = 0
    debit = 400
Sumber nomor : 3
    x = 0
    y = 800
    debit = 700
Sumber nomor : 4
    x = 600
    y = 250
    debit = 600
Sumber nomor : 5
    x = 500
    y = 300
    debit = 300

Harga awal xp = 200
Harga awal yp = -50
Delta xp      = 100
Delta yp      = 100

Toleransi xp  = 0.001
Toleransi yp  = 0.001
Perbandingan delta baru dan lama = 0.6
```

Proses iterasi:

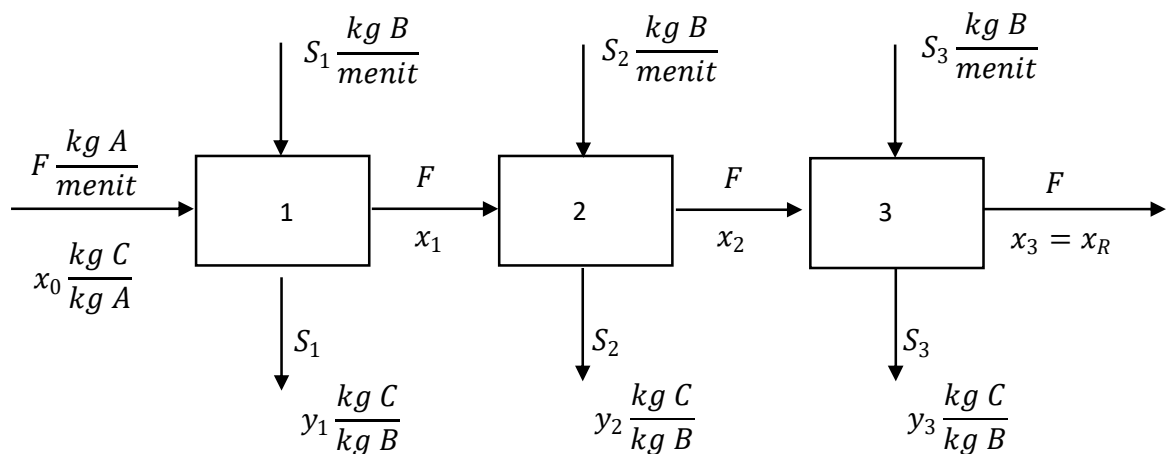
xp	yp	f (xp, yp)
200.0000	-50.0000	108703.4
300.0000	-50.0000	105308.8
300.0000	50.0000	95039.79
400.0000	150.0000	84782.08
500.0000	250.0000	78967.65
500.0000	286.0000	78578.00
495.3344	286.0000	78569.97
498.1338	286.0000	78568.86
498.1338	288.7994	78568.20
498.1338	287.1197	78568.09
496.4542	287.1197	78567.15
497.4619	287.1197	78566.88
496.8573	287.1197	78566.75
497.0749	287.1197	78566.69
497.0749	287.2503	78566.68
497.0851	287.2503	78566.65

Hasil hitungan :

x optimum = 497.0851
 y optimum = 287.2503
 Ongkos minimum = 78566.65
 --selesai--

Soal 15:

Campuran C dan A akan diambil C -nya dengan ekstraksi menggunakan solven B dalam ekstraktor 3 tingkat yang beroperasi secara *cross-current* (lihat Gambar 6.6). Hubungan kesetimbangan antara C dalam fasa B (y) dan C dalam fasa A (x) mengikuti persamaan: $y = kx^2$



Gambar 6.6 Ekstraktor 3 tingkat aliran cross-current

Ingin dicari S_1, S_2, S_3 yang memberikan x_R minimal, jika $S_1 + S_2 + S_3 = S \approx$ tetap (minimasi $x_R = f(S_1, S_2)$).

Diketahui: $F = 100$ kg A/menit; $S = 180$ kg B/menit; $x_0 = 0,2$ kg C/kg A; dan $k = 20$.

Jawaban:

$$x_1 = \frac{-F + \sqrt{F^2 + 4 F \cdot S_1 \cdot k \cdot x_0}}{2 S_1 \cdot k}$$

$$x_2 = \frac{-F + \sqrt{F^2 + 4 F \cdot S_2 \cdot k \cdot x_1}}{2 S_2 \cdot k}$$

$$x_R = \frac{-F + \sqrt{F^2 + 4 F \cdot S_3 \cdot k \cdot x_2}}{2 S_3 \cdot k}$$

$$S_3 = S - S_1 - S_2$$

Dipakai minimasi $x_R = f(S_1, S_2)$ dengan cara Hooke-Jeeves.

Ambil: $(S_1)_{awal} = 20$; $(S_2)_{awal} = 100$; $\Delta S_1 = 8$; $\Delta S_2 = 8$; toleransi $S_1 = 0,01$;

toleransi $S_2 = 0,01$; perbandingan $(\Delta)_{baru}$ dengan $(\Delta)_{lama} = 0,6$.

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Jumlah A masuk ekstraktor (kg A/menit) ..... = 100
Jumlah total B masuk ekstraktor (kg B/menit) .... = 180
Konstanta kesetimbangan, k ..... = 20
Kandungan C dalam A masuk (kg C/kg A) ..... = 0.2
Jumlah B ke ekstraktor 1 awal, S1-awal (kg B/men) = 20
Jumlah B ke ekstraktor 2 awal, S2-awal (kg B/men) = 100
Delta S1 ..... = 8
Delta S2 ..... = 8
Toleransi S1 ..... = 0.01
Toleransi S2 ..... = 0.01
Perbandingan delta baru dan delta lama ..... = 0.6
```

S1, kg B/men	S2, kg B/men	xR
20.00	100.00	0.04018351
28.00	100.00	0.03981976
28.00	92.00	0.03935742
36.00	84.00	0.03878583
44.00	76.00	0.03847029
52.00	68.00	0.03836017
44.00	68.00	0.03827996
44.00	60.00	0.03823005
48.80	60.00	0.03821748
45.92	60.00	0.03821709
47.65	60.00	0.03821452
47.03	60.00	0.03821447
47.40	60.00	0.03821437
47.40	59.63	0.03821435
47.45	59.63	0.03821435
47.45	59.68	0.03821434
47.50	59.72	0.03821433
47.45	59.72	0.03821433
47.45	59.77	0.03821432
47.40	59.82	0.03821432

Hasil hitungan:		

S1-optimum = 47.40 kg B/menit		
S2-optimum = 59.82 kg B/menit		
S3-optimum = 72.78 kg B/menit		
xR-minimum = 0.03821432		
--selesai--		

Soal 16:

Diketahui data hubungan antara tekanan uap suatu zat (P^0) dengan suhu (T, K) sebagai berikut:

T, K	280	300	320	340	360	380	400
P^0, cmHg	2	5	12	25	49	89	148

Hubungan antara P^0 (cmHg) dengan $T(K)$ dapat didekati dengan persamaan Clausius-Clapeyron,

$$P^0 = \exp \left[A + \frac{B}{T} \right]$$

Dari data tersebut dicari harga A dan B yang terbaik, yang memberikan

$$SSE = \sum [(P^0)_{\text{terhitung}} - (P^0)_{\text{data}}]^2 = f(A, B)$$

minimum. Gunakan metoda optimasi (minimasi) Hooke-Jooves, dengan: Harga A awal = 12; B awal = - 4200; $(\Delta_A) = 1,48$; $(\Delta_B) = 150$; Toleransi $A = 0,01$; Toleransi $B = 1$; Perbandingan $(\Delta)_{\text{baru}}$ dengan $(\Delta)_{\text{lama}} = 0,6$.

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Jumlah data = 7

Suhu ( 1 ) = 280 K
Tekanan ( 1 ) = 2 cmHg

Suhu ( 2 ) = 300 K
Tekanan ( 2 ) = 5 cmHg

Suhu ( 3 ) = 320 K
Tekanan ( 3 ) = 12 cmHg

Suhu ( 4 ) = 340 K
Tekanan ( 4 ) = 25 cmHg

Suhu ( 5 ) = 360 K
Tekanan ( 5 ) = 49 cmHg

Suhu ( 6 ) = 380 K
Tekanan ( 6 ) = 89 cmHg

Suhu ( 7 ) = 400 K
Tekanan ( 7 ) = 148 cmHg

Harga awal A ..... = 12
Harga awal B ..... = -4200
Delta A ..... = 1.48
Delta B ..... = 150
Toleransi A ..... = 0.01
Toleransi B ..... = 1
Perbandingan delta baru dan lama = 0.6
```

Proses iterasi:

A	B	SSE
12.00	-4200	31086.43
13.48	-4200	24949.15
13.48	-4050	21554.07
14.96	-4050	806.8108
14.96	-3960	133.4218
14.96	-3992.4	17.64816
14.96	-3980.736	4.151588
14.96	-3984.935	2.308458
14.96	-3983.423	2.083306

Hasil hitungan :

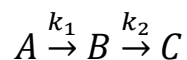
A optimum = 14.96
B optimum = -3983.423

Suhu (K)	p0-hitung (cmHg)	p0-data (cmHg)
280	2.082331	2.0
300	5.375878	5.0
320	12.32712	12.0
340	25.63732	25.0
360	49.15283	49.0
380	87.99733	89.0
400	148.6272	148.0

--selesai--

Soal 17:

Suatu reaksi berurutan fasa cair order 1:



dijalankan dalam sebuah reaktor *batch* yang beroperasi secara isotermis. Harga-harga k_1 dan k_2 mengikuti persamaan:

$$k_1 = A_1 \cdot \exp\left[-\frac{E_1}{RT}\right]$$

$$k_2 = A_2 \cdot \exp\left[-\frac{E_2}{RT}\right]$$

Ingin dicari suhu optimum yang memberikan C_B yang maksimum untuk waktu reaksi θ tertentu. Gunakan cara *golden-section* untuk maksimasi $C_B = f(T)$ serta

metoda Runge-Kutta untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial yang terbentuk. Data: $A_1 = 0,145$ (l/menit); $A_2 = 0,05$ (l/menit); $E_1 = 1167,8$; $E_2 = 1580,8$ (cal/gmol); $C_{A0} = 2,0$ gmol/L; $\theta = 60$ menit; $R = 1,987$ cal/gmol/K.

Jawaban:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1 \cdot C_A = f_1 \quad (\text{dari neraca massa A})$$

$$\frac{dC_B}{dt} = k_1 \cdot C_A - k_2 \cdot C_B = f_2 \quad (\text{dari neraca massa B})$$

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: maksimasi dengan *golden-section* $C_B = f(T)$
2. *Subroutine*: metode Runge-Kutta untuk menghitung C_A dan C_B .
3. *Sub-subroutine*: menghitung f_1 dan f_2 .

Ambil: Batas bawah optimasi suhu, $T_A = 300$ K

Batas atas optimasi suhu, $T_B = 500$ K

Toleransi = 0,1

Jumlah interval waktu = 60

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Konsentrasi A mula-mula (gmol/L) ..... = 2.0
Frekwensi tumbukan reaksi 1 (1/menit) ..... = 0.145
Tenaga aktivasi reaksi 1 (cal/gmol) ..... = 1167.8
Frekwensi tumbukan reaksi 2 (1/menit) ..... = 0.050
Tenaga aktivasi reaksi 2 (cal/gmol) ..... = 1580.8
Waktu reaksi (menit) ..... = 60
Konstanta gas umum (cal/gmol/K) ..... = 1.987
Batas bawah suhu optimum (K) ..... = 300
Batas atas suhu optimum (K) ..... = 500
Toleransi suhu ..... = 0.1
Jumlah interval waktu ..... = 60
```

TA, K	TB, K	(CB)A, gmol/L	(CB)B, gmol/L
-----	-----	-----	-----
300.00	500.00	1.247188	1.228761
300.00	423.61	1.247188	1.313879
347.21	423.61	1.324161	1.313879
347.21	394.43	1.324161	1.331262
365.25	394.43	1.333320	1.331262

365.25	383.28	1.333320	1.334177
372.14	383.28	1.334535	1.334177
372.14	379.02	1.334535	1.334635
374.77	379.02	1.334700	1.334635
374.77	377.40	1.334700	1.334707
375.77	377.40	1.334721	1.334707
375.77	376.78	1.334721	1.334720
375.77	376.39	1.334721	1.334723
376.01	376.39	1.334723	1.334723
376.01	376.25	1.334723	1.334723
376.10	376.25	1.334723	1.334723
376.10	376.19	1.334723	1.334723

 Hasil hitungan:

Suhu optimum = 376.15 K
 (CB) maksimum = 1.334723 gmol/L

Konsentrasi bahan-bahan pada akhir reaksi:

(CA) = 0.322871 gmol/L
 (CB) = 1.334723 gmol/L
 (CC) = 0.342406 gmol/L

--selesai--

Soal 18:

Reaksi order 1 fasa cair; $A \rightarrow$ hasil, dijalankan dengan bantuan katalisator padat berpori. Katalisator berbentuk bola, dengan jari-jari $R = 2$ cm. Reaksi terjadi dipermukaan pori dengan tetapan kecepatan reaksi k . Luas permukaan pori tiap volum katalisator = a . Harga $ka = 1 \times 10^{-3} \text{ det}^{-1}$. Untuk bisa mencapai permukaan pori, A harus mendifusi kedalam bola lewat pori. Harga difusivitas efektif, $De = 1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{detik}$. Konsentrasi A di cairan disekitar bola $C_{Af} = 5 \times 10^{-4} \text{ gmol/cm}^3$. Cari distribusi konsentrasi A dalam katalisator dan harga faktor efektivitas. Untuk penyelesaian PD, gunakan cara Runge-Kutta dengan harga C_A pada $r = 0$ dicoba (*trial*), sampai diperoleh $C_{Af} = 5 \times 10^{-4}$, menggunakan cara Newton Raphson.

Jawaban:

Persamaan diferensial: $\frac{d^2 C_A}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dC_A}{dr} = \frac{ka}{De} \cdot C_A$

Modifikasi: $\frac{dC_A}{dr} = u = f_1$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2u}{r} + \frac{ka}{De} \cdot C_A = f_2$$

Keadaan batas:

$$r = 0; C_A = C_A(0); \frac{du}{dr} = \frac{ka}{3.De} \cdot C_A$$

(diperoleh dengan $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u}{r} = \frac{du}{dr}$ kemudian dimasukkan ke PD)

$$\text{Faktor efektivitas (\%)} = \frac{300}{R^3 \cdot C_{Af}} \cdot \int_0^R r^2 \cdot C_A \cdot dr$$

Struktur program komputernya adalah:

1. Program pokok: Newton Raphson

$$f(C_A(0)) = (C_{Af})_{\text{terhitung}} - C_{Af} = 0$$

2. *Subroutine*: masukan $C_A(0)$, keluaran $f(C_A(0))$

Isi: Runge-Kutta

Sub-subroutine: menghitung f_1 dan f_2

3. Integrasi dengan cara Simpson untuk menghitung faktor efektivitas.

Ambil: Toleransi = 1×10^{-8}

Interval untuk diferensiasi, $\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$

Perkiraan $C_A(0) = 4,5 \times 10^{-4} \text{ gmol/cm}^3$

Jumlah interval panjang = 40

Jumlah interval sampai disimpan dan dicetak = 4

Untuk perhitungan faktor efektivitas, gunakan harga-harga C_A yang terhitung.

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Difusivitas efektif (cm2/detik) ..... = 0.0001
Harga k.a (1/detik) ..... = 0.001
Jari-jari bola (cm) ..... = 2
Konsentrasi A disekitar bola (gmol/cm3) ..... = 0.0005
Jumlah interval (genap) ..... = 40
Jumlah interval sampai print ..... = 4
Toleransi ..... = 1E-08
Interval untuk diferensiasi ..... = 1E-07
Perkiraan konsentrasi di pusat bola (gmol/cm3) = 0.00045
```

Proses iterasi :

CA(0)	CAF
0.00045	1.985491E-02
1.137247E-05	5.017762E-04
1.133221E-05	5.000001E-04

Distribusi konsentrasi :

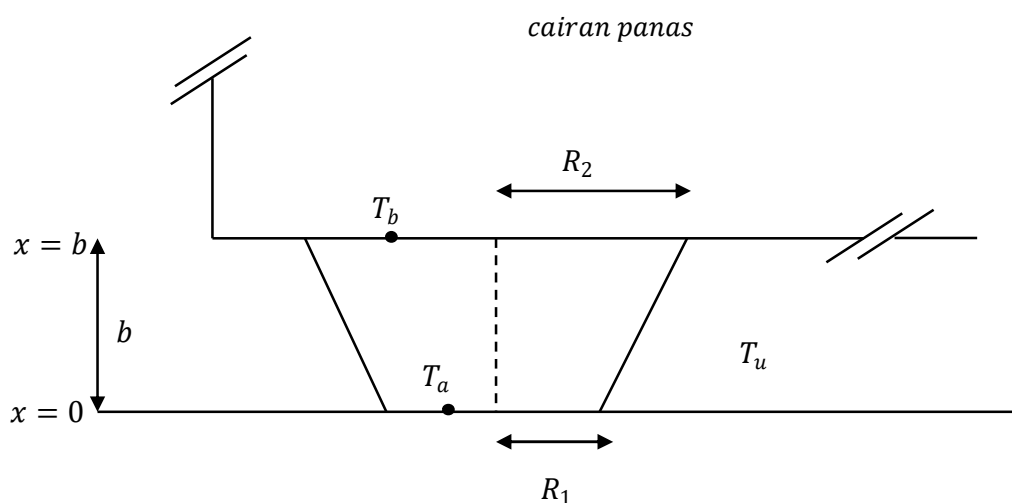
Jari-jari (cm)	CA (gmol/cm ³)
0.0	1.133221E-05
0.2	1.210295E-05
0.4	1.460530E-05
0.6	1.946573E-05
0.8	2.793293E-05
1.0	4.225372E-05
1.2	6.636125E-05
1.4	1.071019E-04
1.6	1.764092E-04
1.8	2.951567E-04
2.0	5.000001E-04

Faktor efektivitas = 39.99328 %
--selesai--

Catatan: Soal ini lebih mudah diselesaikan dengan *finite difference approximation*, tetapi untuk latihan, pakailah cara diatas.

Soal 19:

Penyangga tangki berisi cairan berbentuk kerucut terpancung terbalik mempunyai jari-jari bidang bawah R_1 , jari-jari bidang atas R_2 dan tinggi b (Gambar 6.7). Konduktivitas panas bahan = k dan koefisien perpindahan panas ke udara = h . Suhu udara = T_u , suhu dasar tangki T_b dan suhu permukaan lantai T_a . Nilai b jauh lebih besar daripada R_2



Gambar 6.7 Penyangga tangki bentuk kerucut terpancung terbalik

Ingin dicari distribusi suhu $T = f(x)$ pada keadaan *steady* (gradien suhu arah radial diabaikan) dan panas yang terbuang ke udara. Diketahui: $k = 0,7$ Watt/cm/K; $h = 0,001$ Watt/cm²/K; $T_u = 300$ K; $T_b = 500$ K; $T_a = 293$ K; $R_1 = 2$ cm; $R_2 = 3$ cm; $b = 30$ cm.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$(x + \beta) \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dT}{dx} - \alpha \cdot (T - T_u) = 0$$

dengan:

$$\alpha = \frac{2h}{k} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{R_2 - R_1}\right)^2}$$

$$\beta = \frac{b \cdot R_1}{(R_2 - R_1)}$$

Finite difference approximation (central):

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$:

$$\left[i + \frac{\beta}{\Delta x} - 1\right] \cdot T_{i-1} + \left[-2 \cdot \left[i + \frac{\beta}{\Delta x}\right] - \alpha \cdot \Delta x\right] \cdot T_i + \left[i + \frac{\beta}{\Delta x} + 1\right] \cdot T_{i+1} = -\alpha \cdot \Delta x \cdot T_u$$

Khusus untuk $i = 1$

$$\left[-2 \cdot \left[1 + \frac{\beta}{\Delta x}\right] - \alpha \cdot \Delta x\right] \cdot T_1 + \left[2 + \frac{\beta}{\Delta x}\right] \cdot T_2 = -\alpha \cdot \Delta x \cdot T_u - \frac{\beta}{\Delta x} \cdot T_a$$

dan untuk $i = N-1$:

$$\left[N + \frac{\beta}{\Delta x} - 2\right] \cdot T_{N-2} + \left[-2 \cdot \left[N - 1 + \frac{\beta}{\Delta x}\right] - \alpha \cdot \Delta x\right] \cdot T_{N-1} = -\left[N + \frac{\beta}{\Delta x}\right] \cdot T_b - \alpha \cdot \Delta x \cdot T_u$$

$$\text{Panas hilang, } q_{\text{loss}} = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{R_2 - R_1}{b}\right]^2} \cdot \int_0^b \left[R_1 + x \cdot \left[\frac{R_2 - R_1}{b}\right]\right] \cdot (T - T_u) dx$$

(dihitung dengan integrasi cara Simpson, setelah $T = f(x)$ diperoleh).

Ambil: Harga $\pi = 3,14159$

Jumlah interval panjang (genap) = 10

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

jari2 bidang bawah (cm) = 2
jari2 bidang atas (cm) = 3
tinggi (cm) = 30
konduktivitas panas bahan (watt/cm/detik) = .7
koefisien perpindahan panas ke udara (watt/cm2/detik) = .001

suhu dasar (K) = 293
suhu atas (K) = 500
suhu udara (K) = 300
jumlah interval panjang (genap) = 10

distribusi suhu:
-----

      x (cm)          T (K)
      -----
      0              293
      3              318.415
      6              341.735
      9              363.4939
     12              384.1204
     15              403.9624
     18              423.307
     21              442.3936
     24              461.4253
     27              480.5767
     30              500

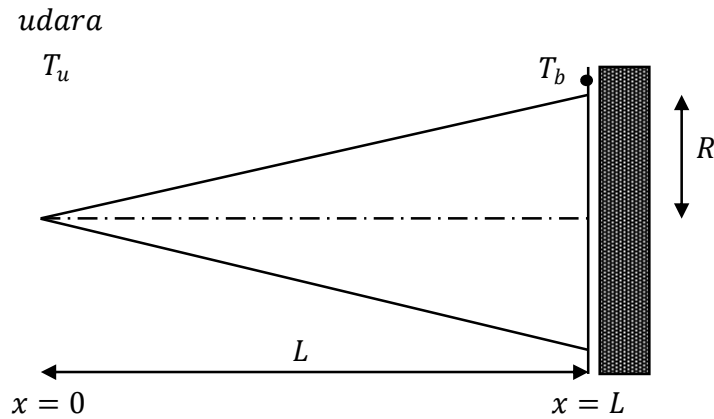
panas terbang ke udara = 51.0513 watt/detik

--selesai--

```

Soal 20:

Suatu fin berbentuk kerucut dengan jari-jari alas R dan tinggi L ($R \ll L$), bagian alasnya melekat pada permukaan padatan yang bersuhu T_b (Gambar 6.8). konduktivitas panas bahan fin = k . Koefisien perpindahan panas antara permukaan fin dan udara = h . Suhu udara T_u . Ingin dicari distribusi suhu sepanjang fin pada keadaan *steady* dan efisiensi fin. Gradien suhu arah radial diabaikan.



Gambar 6.8 *Fin berbentuk kerucut*

Diketahui: $k = 0,1 \text{ cal/detik/cm/}^{\circ}\text{C}$; $h = 0,003 \text{ cal/det/cm}^2/\text{}^{\circ}\text{C}$; $T_u = 30^{\circ}\text{C}$; $T_b = 400^{\circ}\text{C}$; $R = 2 \text{ cm}$; $L = 10 \text{ cm}$.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dT}{dx} - \beta \cdot (T - T_u) = 0$$

dengan:

$$\beta = \frac{2h\sqrt{L^2 + R^2}}{k \cdot L}$$

Finite difference approximation (central):

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-2$:

$$\left[1 - \frac{1}{2i}\right] T_{i-1} - [2 + \beta(\Delta x)^2] T_i + \left[1 + \frac{1}{2i}\right] T_{i+1} = -\beta(\Delta x)^2 \cdot T_u$$

Khusus untuk $i = 0$

$$(1 + \alpha) T_0 - T_1 = \alpha \cdot T_u \text{ dengan } \alpha = \frac{h \Delta x}{kR} \sqrt{L^2 + R^2}$$

(diperoleh dengan neraca panas elemen volum pada puncak kerucut, tinggi $\Delta x/2$).

Khusus untuk $i = N-1$

$$\left[1 - \frac{1}{2(N-1)}\right] T_{N-2} - [2 + \beta(\Delta x)^2] T_{N-1} = -\beta(\Delta x)^2 \cdot T_u - \left[1 + \frac{1}{2(N-1)}\right] T_b$$

(diperoleh dari persamaan umum, diisi $i = N-1$).

$$\text{Panas hilang, } q = 2\pi h \cdot \frac{R}{L^2} \sqrt{L^2 + R^2} \cdot \int_0^L x(T - T_u) dx$$

$$q_{ideal} = \pi R h \cdot \sqrt{L^2 + R^2} \cdot (T_b - T_u)$$

$$\text{Efisiensi fin} = \frac{q}{q_{ideal}} \times 100\%$$

Ambil: Jumlah interval panjang (genap) = 50

Jumlah interval sampai mencetak = 5

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Konduktivitas panas logam (cal/detik/cm/C) .. = 0.1
Koefisien perpindahan panas (cal/detik/cm2/C) = 0.003
Jari2 alas kerucut (cm) ..... = 2
Tinggi kerucut (cm) ..... = 10
Suhu dasar kerucut (oC) ..... = 400
Suhu udara (oC) ..... = 30
Jumlah interval panjang (genap) ..... = 50
Jumlah interval sampai print ..... = 5
```

distribusi suhu :

```
-----
      Jarak (cm)      Suhu (oC)
      -----
          0.0          136.6755
          1.0          144.0912
          2.0          150.4466
          3.0          160.1733
          4.0          173.9832
          5.0          192.5976
          6.0          216.9213
          7.0          248.1174
          8.0          287.6773
          9.0          337.5013
         10.0          400.000
      -----
```

```
q-loss      = 43.75854 cal/detik
q-ideal     = 71.12447 cal/detik
efisiensi   = 61.52389 %
--selesai--
```

Soal 21:

Ditinjau difusi dan reaksi kimia dalam katalisator padat berpori, bentuk silinder panjang berjari-jari R . Reaksi order 1. Konsentrasi A di $r = R$ adalah C_{Af} . Ingin dicari $C_A = f(r)$ pada keadaan *steady* dan *isotermis*.

Diketahui: $D_e = 1 \times 10^{-5}$; $k = 2 \times 10^{-5}$; $R = 2$; $C_{Af} = 5 \times 10^{-4}$

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{d^2 C_A}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dC_A}{dr} - \frac{k}{D_e} \cdot C_A = 0$$

Finite Difference Approximation:

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-2$.

$$\left[1 - \frac{1}{2i}\right] \cdot (C_A)_{i-1} + \left[-2 - \frac{k \cdot (\Delta r)^2}{D_e}\right] \cdot (C_A)_i + \left[1 + \frac{1}{2i}\right] (C_A)_{i+1} = 0$$

Khusus untuk $i = 0$

$$\left[4 + \frac{k \cdot (\Delta r)^2}{D_e}\right] \cdot (C_A)_0 - 4 \cdot (C_A)_1 = 0$$

(dari neraca massa pada elemen volum pada sumbu silinder berjari-jari $\Delta r/2$).

Khusus untuk $i = N-1$

$$\left[1 - \frac{1}{2(N-1)}\right] \cdot (C_A)_{N-2} + \left[-2 - \frac{k \cdot (\Delta r)^2}{D_e}\right] \cdot (C_A)_{N-1} = \left[1 + \frac{1}{2(N-1)}\right] \cdot (C_{Af})$$

(dari neraca massa A pada kulit silinder, tebal $\Delta r/2$).

$$\text{Faktor efektivitas, } \eta = \frac{2}{R^2 \cdot C_{Af}} \cdot \int_0^R r \cdot C_A \cdot dr$$

Ambil: Jumlah interval panjang = 40

Jumlah interval sampai mencetak = 4

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

Difusivitas efektif ( cm2/detik ) ..... = 0.00001
Tetapan kecepatan reaksi, k.a ( 1/detik ) = 0.00002
Jari-jari silinder ( cm ) ..... = 2
Konsentrasi A diluar silinder ( gmol/cm3 ) = 0.0005
Jumlah interval panjang ..... = 40
Jumlah interval untuk print ..... = 4

```

Distribusi konsentrasi:

Jari-jari, cm	CA, gmol/cm3
0.0	1.17639E-04
0.2	1.200025E-04
0.4	1.272357E-04
0.6	1.39776E-04
0.8	1.58385E-04
1.0	1.841997E-04
1.2	2.188093E-04
1.4	2.643628E-04
1.6	3.237152E-04
1.8	4.006224E-04
2.0	0.0005

Faktor efektivitas = 0.5632624
 --selesai--

Soal 22:

Suatu silinder panjang berjari-jari R , yang mula-mula bersuhu T_a dicelup kedalam cairan yang suhunya dianggap tetap T_c . Ingin dicari distribusi suhu dalam silinder pada berbagai posisi dan waktu, $T = (r, t)$. Diketahui: $\rho = 1,5 \text{ g/cm}^3$; $k = 0,01 \text{ cal/det/cm/}^\circ\text{C}$; $c = 0,8 \text{ cal/g/}^\circ\text{C}$; $h = 0,02 \text{ cal/detik/ cm}^2/\text{ }^\circ\text{C}$; $R = 4 \text{ cm}$; $T_a = 300^\circ\text{C}$ dan $T_c = 100^\circ\text{C}$.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Finite Difference Approximation (cara implisit):

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

$$\left[1 - \frac{1}{2i}\right] T_{i-1,j+1} + [-2 - M] T_{i,j+1} + \left[1 + \frac{1}{2i}\right] T_{i+1,j+1} = -M \cdot T_{i,j}$$

dengan

$$M = \frac{\rho c \cdot (\Delta r)^2}{k \cdot \Delta t}$$

Khusus untuk $i = 0$

$$[M + 4] \cdot T_{0,j+1} - 4 \cdot T_{1,j+1} = M T_{0,j}$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada sumbu silinder berjari-jari $\Delta r/2$).

Khusus untuk $i = N$

$$\begin{aligned} \left[\frac{2R}{\Delta r} - 1 \right] \cdot T_{N-1,j+1} + \left[-M \left[\frac{R}{\Delta r} - \frac{1}{4} \right] - \left[\frac{2R}{\Delta r} - 1 \right] - \frac{2hR}{k} \right] \cdot T_{N,j+1} \\ = -M \left[\frac{R}{\Delta r} - \frac{1}{4} \right] \cdot T_{N,j} - \frac{2hR}{k} \cdot T_c \end{aligned}$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada kulit silinder setebal $\Delta r/2$).

Ambil: Jumlah interval panjang = 10

Jumlah interval waktu = 40

Jumlah interval waktu sampai mencetak = 20

Modulus (M) = 40

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Rapat massa (g/cm3) ..... = 1.5
Kapasitas panas (cal/g/C) ..... = 0.8
Konduktivitas panas (cal/detik/cm/C) ..... = 0.01
Jari2 silinder (cm) ..... = 4
Koefisien perpind. panas permukaan (cal/det/cm2/C) = 0.02
Jumlah interval panjang ..... = 10
Jumlah interval waktu ..... = 40
Jumlah interval waktu sampai print ..... = 20
Suhu awal (oC) ..... = 300
Suhu cairan (oC) ..... = 100
Modulus (M) ..... = 4
```

Distribusi suhu:

Waktu = 0 detik

Jarak (cm)	Suhu (oC)
0.0	300.000
0.4	300.000
0.8	300.000
1.2	300.000
1.6	300.000
2.0	300.000
2.4	300.000
2.8	300.000
3.2	300.000
3.6	300.000
4.0	300.000

Waktu = 96 detik

Jarak (cm)	Suhu (oC)
0.0	298.0013
0.4	297.6317
0.8	296.3958
1.2	293.8417
1.6	289.1593
2.0	281.1426
2.4	268.2655
2.8	248.9773
3.2	222.2750
3.6	188.4285
4.0	149.4962

Waktu = 192 detik

Jarak (cm)	Suhu (oC)
0.0	280.5289
0.4	279.2810
0.8	275.4626
1.2	268.8378
1.6	259.0843
2.0	245.8903
2.4	229.0782
2.8	208.7334
3.2	185.3070
3.6	159.6561
4.0	132.9990

--selesai--

Soal 23:

Ingin dicari distribusi suhu pada slab luas tak berhingga pada keadaan *unsteady*. Suhu slab mula-mula T_{in} . Mulai suatu saat salah satu permukaan slab ($x = 0$) diberi flux panas sebesar q , sedang permukaan yang lain ($x = L$) dikontakkan dengan cairan bersuhu tetap T_f . Koefisien perpindahan panas antara permukaan slab dengan cairan = h .

Diketahui: $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$; $k = 0,01 \text{ cal/det/cm/}^\circ\text{C}$; $c = 0,5 \text{ cal/g/}^\circ\text{C}$; $h = 0,008 \text{ cal/detik/cm}^2/\text{cm}^2$; $q = 2 \text{ cal/detik/cm}^2$; $T_{in} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_f = 100 \text{ }^\circ\text{C}$; tebal slab, $L = 2 \text{ cm}$.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho \cdot c}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Finite Difference Approximation (cara implisit):

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$:

$$T_{i-1,j+1} + [-2 - M] \cdot T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1} = -MT_{i,j}$$

Khusus untuk $i = 0$

$$\left[1 + \frac{1}{2}M\right] \cdot T_{0,j+1} - T_{1,j+1} = \frac{1}{2}MT_{0,j} + \frac{q \cdot \Delta x}{k}$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada permukaan $x = 0$ setebal $\Delta x/2$).

Khusus untuk $i = N$

$$T_{N-1,j+1} + \left[-1 - \frac{h \cdot \Delta x}{k} - \frac{1}{2}M\right] \cdot T_{N,j+1} = -\frac{1}{2}M \cdot T_{N,j} - \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_f$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada permukaan $x = L$, setebal $\Delta x/2$).

Dalam hal ini, $M = \frac{\rho c \cdot (\Delta x)^2}{k \cdot \Delta t}$

Ambil: Jumlah interval panjang = 10

Jumlah interval waktu = 20

Jumlah interval waktu sampai cetak = 5

M (Modulus) = 2

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

Waktu = 20 detik

Jarak (cm)	Suhu (oC)
0.0	298.2213
0.2	263.5154
0.4	238.7240
0.6	222.0999
0.8	211.4057
1.0	204.4326
1.2	199.2687
1.4	194.3536
1.6	188.4503
1.8	180.6580
2.0	170.5108

Waktu = 30 detik

Jarak (cm)	Suhu (oC)
0.0	321.0346
0.2	285.2010
0.4	257.3473
0.6	236.4922
0.8	221.2248
1.0	209.9456
1.2	201.0812
1.4	193.2388
1.6	185.3061
1.8	176.5164
2.0	166.4892

Waktu = 40 detik

Jarak (cm)	Suhu (oC)
0.0	339.7106
0.2	303.1956
0.4	273.4200
0.6	249.7277
0.8	231.1366
1.0	216.4753
1.2	204.5287
1.4	194.1700
1.6	184.4641
1.8	174.7397
2.0	164.6265

--selesai--

Soal 24:

Suatu larutan encer A dalam B dimasukkan kedalam sebuah pipa kapiler sepanjang L yang salah satu ujungnya tertutup ($x = 0$) dan ujung lainnya terbuka ($x = L$). Konsentrasi A mula-mula C_{Ao} . Mulai suatu saat, pipa diletakkan pada medium B yang mengalir tegak lurus pipa sehingga konsentrasi A pada ujung terbuka selalu nol. Didalam pipa, zat A lalu mendifusi melalui medium B arah aksial. Ingin dicari distribusi konsentrasi A dalam pipa kapiler $C_A = f(x, t)$ dengan cara Crank-Nicolson serta persen A tersisa dalam pipa setiap waktu. Diketahui: $L = 5$ cm; $C_{Ao} = 0,1$ gmol/cm³ dan $D = 6 \times 10^{-5}$ cm²/detik.

Jawaban:

Persamaan difereial:

$$D \cdot \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

Finite Difference Approximation (cara Crank-Nicolson):

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-2$:

$$(C_A)_{i-1,j+1} - [2 + 2M] \cdot (C_A)_{i,j+1} + (C_A)_{i+1,j+1} \\ = -(C_A)_{i-1,j} + [2 - 2M](C_A)_{i,j} - (C_A)_{i+1,j}$$

Khusus untuk $i = 0$

$$[1 + M] \cdot (C_A)_{0,j+1} - (C_A)_{1,j+1} = (-1 + M)(C_A)_{0,j} + (C_A)_{1,j}$$

(dari neraca massa A pada elemen volum pada ujung tertutup setebal $\Delta x/2$).

Khusus untuk $i = N-1$

$$(C_A)_{N-2,j+1} - [2 + 2M] \cdot (C_A)_{N-1,j+1} = -(C_A)_{N-2,j} + [2 - 2M] \cdot (C_A)_{N-1,j}$$

(diperoleh dari persamaan umum, dengan diisi $i = N-1$).

$$\text{Dalam hal ini, } M = \frac{(\Delta x)^2}{D \cdot \Delta t}$$

$$A \text{ tersisa (\%)} = \frac{100}{C_{Ao} \cdot L} \cdot \int_0^L C_A \cdot dx$$

(dihitung dengan cara Simpson).

Ambil: Jumlah interval panjang = 10

Jumlah interval waktu = 20

Jumlah interval waktu sampai dicetak = 5

M (Modulus) = 2

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

Difusivitas (cm²/detik) = 0.00006
 Panjang pipa (cm) = 5
 Konsentrasi A awal (gmol/cm³) = 0.1
 Jumlah interval panjang = 10
 Jumlah interval waktu = 20
 Jumlah interval waktu untuk print ... = 5
 Modulus (M) = 2

Waktu = 0 detik

z (cm)	CA (gmol/cm ³)
0.00	1.000000E-01
0.50	1.000000E-01
1.00	1.000000E-01
1.50	1.000000E-01
2.00	1.000000E-01
2.50	1.000000E-01
3.00	1.000000E-01
3.50	1.000000E-01
4.00	1.000000E-01
4.50	1.000000E-01
5.00	1.000000E-01

A-sisa = 100 %

Waktu = 10416.67 detik

z (cm)	CA (gmol/cm ³)
0.00	9.998698E-02
0.50	9.997349E-02
1.00	9.990896E-02
1.50	9.968770E-02
2.00	9.899714E-02
2.50	9.704560E-02
3.00	9.217279E-02
3.50	8.170732E-02
4.00	6.281063E-02
4.50	3.457859E-02
5.00	0.000000E+00

A-sisa = 81.99122 %

Waktu = 20833.34 detik

z (cm)	CA (gmol/cm3)
0.00	9.955751E-02
0.50	9.936084E-02
1.00	9.865542E-02
1.50	9.707532E-02
2.00	9.396705E-02
2.50	8.839621E-02
3.00	7.928096E-02
3.50	6.570328E-02
4.00	4.734679E-02
4.50	2.487421E-02
5.00	0.000000E+00

A-sisa = 74.65658 %

Waktu = 31250 detik

z (cm)	CA (gmol/cm3)
0.00	9.781332E-02
0.50	9.731381E-02
1.00	9.570211E-02
1.50	9.265316E-02
2.00	8.767889E-02
2.50	8.022215E-02
3.00	6.979889E-02
3.50	5.616963E-02
4.00	3.949476E-02
4.50	2.041368E-02
5.00	0.000000E+00

A-sisa = 69.00841 %

Waktu = 41666.67 detik

z (cm)	CA (gmol/cm3)
0.00	9.469612E-02
0.50	9.396613E-02
1.00	9.170583E-02
1.50	8.772134E-02
2.00	8.174501E-02
2.50	7.351210E-02
3.00	6.285298E-02
3.50	4.978231E-02
4.00	3.456222E-02
4.50	1.771873E-02
5.00	0.000000E+00

A-sisa = 64.24101 %

--selesai--

Soal 25:

Sebuah bola berpori, berjari-jari R_{out} , dengan porositas ε , mula-mula porinya penuh berisi larutan A dengan konsentrasi C_{Ain} . Mulai suatu saat, bola dicelup dalam larutan A yang konsentrasinya C_{Af} ($C_{Af} < C_{Ain}$) sehingga terjadi difusi ke arah radial didalam bola. Koefisien perpindahan massa antara permukaan bola dan cairan k_c . Cairan konsentrasi A dalam larutan didalam pori sebagai fungsi posisi dan waktu secara numeris dengan cara implisit serta hitung pula % A tersisa dalam bola pada berbagai waktu. Difusivitas efektif A dalam pori D_e . Diketahui: $R_{out} = 4$ cm; $\varepsilon = 0,6$; $C_{Ain} = 0,01$ gmol/cm³; $C_{Af} = 0,002$ gmol/cm³; $k_c = 0,01$ cm/detik; $D_e = 0,001$ cm²/detik.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial C_A}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{D_e} \cdot \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

Finite Difference Approximation:

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ (pakai pendekatan *forward* untuk turunan pertama)

$$(C_A)_{i-1,j+1} + \left[-2 - M - \frac{2}{i}\right] \cdot (C_A)_{i,j+1} + \left[1 + \frac{2}{i}\right] \cdot (C_A)_{i+1,j+1} = -M(C_A)_{i,j}$$

Untuk $i = 0$:

$$\left[1 + \frac{M}{6}\right] \cdot (C_A)_{0,j+1} - (C_A)_{1,j+1} = \frac{1}{6} M (C_A)_{0,j}$$

(dari neraca massa A pada elemen volum pada pusat bola, berjari-jari $\Delta r/2$).

Untuk $i = N$

$$\begin{aligned} &\left[R_{out} - \frac{\Delta r}{2}\right]^2 (C_A)_{N-1,j+1} \\ &+ \left[-\left[R_{out} - \frac{\Delta r}{2}\right]^2 - \frac{k_c}{D_e} R_{out}^2 \cdot \Delta r - \frac{1}{2} M \left[R_{out} - \frac{\Delta r}{4}\right]^2\right] \cdot (C_A)_{N,j+1} \\ &= -\frac{1}{2} M \left[R_{out} - \frac{\Delta r}{4}\right]^2 \cdot (C_A)_{N,j} - k_c \cdot R_{out}^2 \cdot \Delta r \cdot \frac{C_{Af}}{D_e} \end{aligned}$$

(dari neraca massa A pada elemen volum pada kulit bola setebal $\Delta r/2$).

Dalam hal ini, $M = \frac{\varepsilon(\Delta r)^2}{D_e \Delta t}$

$$A \text{ tersisa (\%)} = \frac{300}{C_{Ain} \cdot R_{out}^3} \cdot \int_{r=0}^{r=R_{out}} r^2 \cdot C_A \cdot dr$$

(dihitung dengan cara Simpson)

Ambil: Jumlah interval panjang = 10

Jumlah interval waktu = 10

Jumlah interval waktu sampai dicetak = 5

$M(\text{Modulus}) = 4$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

Difusivitas efektif (cm²/detik) = 0.001
 Jari-jari bola (cm) = 4
 Konsentrasi a awal (gmol/cm³) = 0.01
 Porositas = 0.6
 Koefisien transfer massa (cm/det) = 0.01
 Konsentrasi di sekitar bola (gmol/cm³) = 0.002
 Jumlah interval panjang = 10
 Jumlah interval waktu = 10
 Jumlah interval waktu untuk print = 5
 Modulus (M) = 4

Waktu = 0 detik

Jari-jari, cm	CA, gmol/cm ³
0.0	0.01
0.4	0.01
0.8	0.01
1.2	0.01
1.6	0.01
2.0	0.01
2.4	0.01
2.8	0.01
3.2	0.01
3.6	0.01
4.0	0.01

A tersisa = 100 %

Waktu = 120 detik

Jari-jari, cm	CA, gmol/cm ³
0.0	9.997602E-03
0.4	9.996652E-03
0.8	9.993744E-03
1.2	9.985344E-03
1.6	9.961943E-03
2.0	9.897385E-03
2.4	9.723695E-03
2.8	9.279756E-03
3.2	8.240425E-03
3.6	6.134723E-03
4.0	2.810986E-03

A tersisa = 76.30391 %

Waktu = 240 detik

Jari-jari, cm	CA, gmol/cm3
0.0	9.958055E-03
0.4	9.948352E-03
0.8	9.922117E-03
1.2	9.860629E-03
1.6	9.730304E-03
2.0	9.467952E-03
2.4	8.968345E-03
2.8	8.086116E-03
3.2	6.681774E-03
3.6	4.740079E-03
4.0	2.519224E-03

A tersisa = 66.05892 %
--selesai--

Soal 26:

Suatu bola berjari-jari R , mula-mula bersuhu T_{in} . Mulai suatu saat bola dicelup kedalam cairan yang suhunya dijaga tetap T_f . Koefisien perpindahan panas antara permukaan bola dan cairan = h . Ingin dicari distribusi suhu dalam bola pada berbagai posisi dan waktu, $T = f(r, t)$ dengan cara implisit. Diketahui: $\rho = 1,75$; $k = 0,01$; $c = 2,25$; $R = 5$; $h = 0,008$; $T_{in} = 500$; $T_f = 300$.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Finite Difference Approximation (cara implisit):

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$:

$$\left[1 - \frac{1}{i}\right] T_{i-1,j+1} + [-2 - M] \cdot T_{i,j+1} + \left[1 + \frac{1}{i}\right] \cdot T_{i+1,j+1} = -M T_{i,j}$$

Khusus untuk $i = 0$

$$[M + 6] \cdot T_{0,j+1} - 6 T_{1,j+1} = M T_{0,j}$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada pusat bola, berjari-jari $\Delta r/2$).

Untuk $i = N$

$$-2 \left[R - \frac{\Delta r}{2} \right]^2 T_{N-1,j+1} + \left[2 \left[R - \frac{\Delta r}{2} \right]^2 + 2\beta R^2 + M \left[R - \frac{\Delta r}{4} \right] \right] T_{N,j+1}$$

$$= M \left[R - \frac{\Delta r}{4} \right]^2 T_{N,j} + 2\beta R^2 T_f$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada kulit bola, setebal $\Delta r/2$).

Dalam hal ini, $M = \frac{\rho c (\Delta r)^2}{k \cdot \Delta t}$ dan $\beta = \frac{h(\Delta r)}{k}$

Ambil: M (Modulus) = 4

Jumlah interval panjang = 10

Jumlah interval waktu = 20

Jumlah interval waktu sampai mencetak = 10

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Koefisien pp bola-fluida (cal/det/cm2/C) ... = 8.000001E-03
Konduktifitas panas (cal/det/cm/C) ..... = 0.01
Panas jenis (cal/g/C) ..... = 2.25
Rapat massa (g/cm3) ..... = 1.75
Suhu awal (oC) ..... = 500
Suhu fluida (oC) ..... = 300
Jari-jari bola (cm) ..... = 5
Jumlah interval panjang ..... = 10

Jumlah interval waktu ..... = 20
Jumlah interval waktu untuk cetak ..... = 10
Modulus (M) ..... = 4
```

Distribusi suhu pada bola

Waktu = 0 detik

Jarak (cm)	Suhu (C)
-----	-----
0.0	500
0.5	500
1.0	500
1.5	500
2.0	500
2.5	500
3.0	500
3.5	500
4.0	500
4.5	500
5.0	500
-----	-----

Waktu = 246.0938 detik

Jarak (cm)	Suhu (C)
0.0	499.8352
0.5	499.7927
1.0	499.6373
1.5	499.2476
2.0	498.3357
2.5	496.2823
3.0	491.8762
3.5	483.028
4.0	466.7668
4.5	440.1446
5.0	402.5429

Waktu = 492.1875 detik

Jarak (cm)	Suhu (C)
0.0	496.7709
0.5	496.3843
1.0	495.1301
1.5	492.654
2.0	488.3462
2.5	481.3313
3.0	470.5418
3.5	454.9315
4.0	433.8518
4.5	407.5082
5.0	377.2753

--selesai--

Soal 27:

Udara sebanyak G gmol/detik/cm² yang mengandung A dengan kadar y_{in} (gmol A /gmol udara bebas A) akan dihilangkan A -nya dengan mengubah A menjadi bahan lain dengan bantuan katalisator padat dalam *fluidized bed reactor*. Tinggi *fluidized bed* = L , dan rapat massa katalisator dalam fluidized bed = m gkat/cm³. Kecepatan reaksi mengikuti persamaan:

$$r_A \left[\frac{\text{gmol } A}{\text{waktu. g kat}} \right] = k \cdot y$$

Diketahui: $k = 0,002$; $m = 0,8$; $L = 25$; $G = 15$; $y_{in} = 0,02$;

Data percobaan harga y pada berbagai ketinggian (z , cm):

z	0	5	10	15	20	25
y	0,0181	0,0111	0,0069	0,0042	0,0026	0,0016

Diasumsi bahwa perpindahan massa A arah aksial berlangsung karena dibawa arus gas dan dispersi aksial, dengan difusivitas efektif D_e . Ingin dicari harga D_e yang memberikan

$$SSE = \sum [y_{hitung} - y_{data}]^2 = f(D_e)$$

minimum dengan minimasi *golden section*.

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{G}{D_e} \cdot \frac{dy}{dz} - \frac{k \cdot m}{D_e} y = 0$$

Finite Difference Approximation:

Untuk $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$:

$$\left[1 - \frac{G \cdot \Delta z}{2D_e}\right] y_{i-1} + \left[-2 - \frac{k \cdot m(\Delta z)^2}{D_e}\right] \cdot y_i + \left[1 - \frac{G \cdot \Delta z}{2D_e}\right] \cdot y_{i+1} = 0$$

Khusus untuk $i = 0$

$$\left[1 + \frac{G \cdot \Delta z}{2D_e} + \frac{k \cdot m(\Delta z)^2}{2D_e}\right] \cdot y_0 + \left[\frac{G \cdot \Delta z}{2D_e} - 1\right] \cdot y_1 = \frac{G \cdot \Delta z}{D_e} y_{in}$$

(dari neraca massa A pada elemen volum pada ujung bawah bed setebal $\Delta z/2$).

Khusus untuk $i = N$

$$\left[1 + \frac{G \cdot \Delta z}{2D_e}\right] \cdot y_{N-1} + \left[-\frac{G \cdot \Delta z}{2D_e} - 1 - \frac{k \cdot m(\Delta z)^2}{2D_e}\right] \cdot y_N = 0$$

(dari neraca massa A pada elemen volum pada ujung atas bed setebal $\Delta z/2$).

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: minimasi dengan *golden-section* $SSE = f(D_e)$

2. *Subroutine*: masukan D_e , keluaran SSE

- Isi:
- Menghitung $y = f(z)$ dari D_e , berupa penyelesaian matriks tridiagonal.
 - Sorting data $y = f(z)$ yang seletak dengan data percobaan.
 - Menghitung SSE

Ambil: Jumlah interval untuk hitungan = 40

Batas bawah harga D_e , $(D_e)_a = 0,05$

Batas atas harga D_e , $(D_e)_b = 0,50$

Toleransi = 0,001

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Konstanta kecepatan reaksi (gmol/det/g kat) = 0.002
Rapat massa katalisator (g/cm3) ..... = 0.8
Panjang bed (cm) ..... = 25
Kecepatan udara masuk (gmol/detik/cm2) .... = 15
Kadar A dalam gas masuk (gmol A/gmol ud.) = 0.02
Batas bawah De (cm2/det) ..... = 0.05
Batas atas De (cm2/det) ..... = 0.5
Toleransi De ..... = 0.001
Jumlah interval panjang ..... = 40
```

Data-data percobaan:

```
-----
z, cm      kadar A (y)
-----
0          0.0181
5          0.0111
10         0.0069
15         0.0042
20         0.0026
25         0.0016
-----
```

```
-----
(De) A      (De) B      (SSE) -A      (SSE) -B
-----
0.05000    0.50000    0.170387E-5    0.753832E-5
0.05000    0.328115    0.170387E-5    0.238612E-5
0.05000    0.221885    0.170387E-5    0.422087E-6
0.115654    0.221885    0.267615E-6    0.422087E-6
0.115654    0.181308    0.267615E-6    0.885501E-6
0.140732    0.181308    0.771539E-7    0.885501E-6
0.140732    0.165809    0.771539E-7    0.420129E-7
0.150311    0.165809    0.466354E-7    0.420129E-7
0.156231    0.165809    0.385405E-7    0.420129E-7

0.156231    0.162151    0.385405E-7    0.383338E-7
0.158492    0.162151    0.375511E-7    0.383338E-7
0.158492    0.160753    0.375511E-7    0.376973E-7
0.158492    0.159889    0.375511E-7    0.375112E-7
0.159026    0.159889    0.374784E-7    0.375112E-7
-----
```

Hasil hitungan:

(De) optimum = 0.159458 cm2/detik
(SSE) minimum = 0.374773E-7

z, zm	y-hitung	y-data
0.00	0.0181	0.0181
5.00	0.0112	0.0111
10.00	0.0069	0.0069
15.00	0.0043	0.0042
20.00	0.0026	0.0026
25.00	0.0018	0.0016

--selesai--
Ok

Soal 28:

Suatu circular fin, berjari-jari luar R_{out} , tebal b , melekat pada pipa berjari-jari R_{in} . Suhu permukaan pipa T_s , sedang suhu udara T_u . Gradien suhu arah aksial dapat diabaikan. Data distribusi suhu pada keadaan *steady*:

r, cm	5	6	7	8	9
T, °C	248	165	120	98	91

Permukaan lengkung fin pada $r = R_{out}$ diisolasi. Ingin dicari harga (h/k) pada keadaan tersebut, dengan minimasi:

$$SSE = \sum [T_{hitung} - T_{percobaan}]^2 = f\left(\frac{h}{k}\right)$$

menggunakan cara *golden-section*.

Diketahui: $R_{in} = 4$ cm; $R_{out} = 9$ cm; $b = 0,2$ cm; $T_s = 400$ °C; $T_u = 30$ °C

Jawaban:

Persamaan diferensial:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{kb} \cdot (T - T_u) = 0$$

Finite Difference Approximation (sentral):

$$\left[2 - \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + i\right)} \right] \cdot T_{i-1} + [-4 - 4M] \cdot T_i + \left[2 + \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + i\right)} \right] \cdot T_{i+1} = -4M \cdot T_u$$

(berlaku untuk $i = 1, 2, 3, 4, \dots, N-1$)

Untuk $i = 1$

$$[-4 - 4M] \cdot T_i + \left[2 + \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + 1\right)} \right] \cdot T_2 = -4M \cdot T_u - \left[2 - \frac{1}{\left(\frac{R_{in}}{\Delta r} + 1\right)} \right] \cdot T_s$$

(diperoleh dari persamaan umum, dengan diisi $i = 1$).

Untuk $i = N$:

$$\left[\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{2} \right] \cdot T_{N-1} + \left[-\left(\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{4} \right) M \right] \cdot T_N = -\left(\frac{R_{out}}{\Delta r} - \frac{1}{4} \right) \cdot M \cdot T_u$$

(dari neraca panas pada elemen volum pada permukaan lengkung fin, setebal $\Delta r/2$).

Dalam hal ini, $M = \frac{h \cdot (\Delta r)^2}{k \cdot b}$

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: minimasi dengan cara *golden-section*

$$SSE = f\left(\frac{h}{k}\right)$$

2. *Subroutine*: masukan $\left(\frac{h}{k}\right)$, keluaran *SSE*

- Isi:
- a. Menghitung $T = f(r)$ dari $\left(\frac{h}{k}\right)$, berupa penyelesaian persamaan matriks tridiagonal.
 - b. Sorting data $T = f(r)$ yang seletak dengan data percobaan.
 - c. Menghitung *SSE*

Ambil: Jumlah interval = 20

Batas bawah $(h/k) = 0,01$

Batas atas $(h/k) = 0,03$

Toleransi $(h/k) = 0,0003$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```
Jari-jari dalam fin (cm) ... = 4
Jari-jari luar fin (cm) ... = 9
Tebal fin (cm) ..... = 0.2
Suhu pipa (oC) ..... = 400
Suhu udara sekeliling (oC) . = 30
Jumlah inkremen panjang .... = 20
Batas bawah (h/k) ..... = 0.01
Batas atas (h/k) ..... = 0.03
Toleransi (h/k) ..... = 0.0001
```

```
Jumlah data ..... = 5
```

```
Data ke - 1
```

```
Jari-jari, cm ... = 5
Suhu, oC ..... = 248
```

```
Data ke - 2
```

```
Jari-jari, cm ... = 6
Suhu, oC ..... = 165
```

```
Data ke - 3
```

```
Jari-jari, cm ... = 7
Suhu, oC ..... = 120
```

```
Data ke - 4
```

```
Jari-jari, cm ... = 8
Suhu, oC ..... = 98
```

```
Data ke - 5
```

```
Jari-jari, cm ... = 9
Suhu, oC ..... = 91
```

(h/k) -A	(h/k) -B	(SSE) -A	(SSE) -B
-----	-----	-----	-----
0.01000	0.03000	15026.2200	3342.6380
0.01764	0.03000	413.6826	3342.6380
0.01764	0.02528	413.6826	1201.6730
0.01764	0.02236	413.6826	285.2846
0.01944	0.02236	21.5864	285.2846
0.01944	0.02125	21.5864	84.4424
0.01944	0.02056	21.5864	17.2354
0.01987	0.02056	1.7252	17.2354
0.01987	0.02029	1.7252	4.7915
0.01987	0.02013	1.7252	1.0671
0.01997	0.02013	0.4896	1.0671
0.01997	0.02007	0.4896	0.4672
0.02001	0.02007	0.3345	0.4672
-----	-----	-----	-----

```
Hasil hitungan:
```

```
(h/k)-optimum = 0.020038
(SSE)-minimum = 0.341352
```

Jari2, cm	Suhu terhitung, oC	Suhu data, oC
5.00	248.32	248.0
6.00	164.88	165.0
7.00	119.72	120.0
8.00	97.67	98.0
9.00	91.19	91.0
--selesai--		

Soal 29:

Cairan sejumlah 100 gmol/menit dengan fraksi mol A , B , C masing-masing 0,4; 0,3; 0,3 dimasukkan alat penguap (*vaporizer*) sehingga sebagian cairan tersebut teruapkan. Suhu cairan masuk 360 K dan tekanan dalam *vaporizer* 76 cmHg. Sistem mengikuti hukum Raoult-Dalton. Jika panas yang dimasukkan ke *vaporizer* 500000 cal/menit, hitung suhu bahan-bahan keluar *vaporizer*, jumlah cairan dan uap serta komposisinya!

Persamaan-persamaan tekanan uap:

$$P_A^o = \exp \left[15,35 - \frac{3764}{T} \right]$$

$$P_B^o = \exp \left[16,07 - \frac{4497}{T} \right]$$

$$P_C^o = \exp \left[15,95 - \frac{4934}{T} \right]$$

$$\text{Data: } Cp_A^l = 30 \frac{\text{cal}}{\text{gmol K}}; Cp_B^l = 35 \frac{\text{cal}}{\text{gmol K}}; Cp_C^l = 40 \frac{\text{cal}}{\text{gmol K}}$$

$$Cp_A^v = 25 \frac{\text{cal}}{\text{gmol K}}; Cp_B^v = 30 \frac{\text{cal}}{\text{gmol K}}; Cp_C^v = 35 \frac{\text{cal}}{\text{gmol K}}$$

Panas penguapan pada 298K:

$$\lambda_A = 7000 \frac{\text{cal}}{\text{gmol}}; \lambda_B = 8000 \frac{\text{cal}}{\text{gmol}}; \lambda_C = 9000 \frac{\text{cal}}{\text{gmol}}$$

Petunjuk: gunakan metode Newton-Raphson bertingkat (*unknowns* T dan L/F).

Jawaban:

$$x_i = \frac{z_i}{\frac{L}{F} + \frac{P_i^o}{P_t} \left(1 - \frac{L}{F} \right)} \quad (\text{dari gabungan neraca massa total, neraca massa komponen } i \text{ dan kesetimbangan}).$$

$$y_i = \frac{p_i^o}{P_t} x_i \quad (\text{Raoult-Dalton})$$

$$H_F = \left(\sum (z_i C p_i^\ell) \right) (T_F - 298)$$

$$H_L = \left(\sum (x_i C p_i^\ell) \right) (T - 298)$$

$$H_V = \left(\sum (y_i C p_i^v) \right) (T - 298) + \sum y_i \cdot \lambda_i$$

$$f_1(T) = Q + F \cdot H_F - V \cdot H_V - L \cdot H_L = 0$$

$$f_2\left(\frac{L}{F}\right) = \sum (x_i) - 1 = 0$$

$$L = \left(\frac{L}{F}\right) \cdot F$$

$$V = F \left(1 - \frac{L}{F}\right)$$

Struktur program komputernya adalah sebagai berikut:

1. Program pokok: Newton-Raphson

$$f_1(T) = 0$$

2. *Subroutine*: masukan T , keluaran $f_1(T)$

$$\text{Isi: Newton-Raphson } f_2\left(\frac{L}{F}\right) = 0$$

3. *Sub-subroutine*: masukan $\left(\frac{L}{F}\right)$, keluaran $f_2\left(\frac{L}{F}\right)$

Ambil: $T_{old} = 375$

$$\left(\frac{L}{F}\right)_{old} = 0,5$$

Toleransi $T = 0,0001$

Toleransi $\frac{L}{F} = 0,00001$

$$\varepsilon_T = 0,001$$

$$\varepsilon_{\frac{L}{F}} = 0,00001$$

Keluaran program komputernya adalah sebagai berikut:

```

Fraksi mol A = 0.4
Fraksi mol B = 0.3
Fraksi mol C = 0.3
Jumlah umpan (gmol/menit) ..... = 100
Suhu umpan (K) ..... = 360
Tekanan (cmHg) ..... = 76
Kapasitas panas A cair (cal/gmol/K) = 30
Kapasitas panas B cair (cal/gmol/K) = 35
Kapasitas panas C cair (cal/gmol/K) = 40
Kapasitas panas A uap (cal/gmol/K) = 25
Kapasitas panas B uap (cal/gmol/K) = 30
Kapasitas panas C uap (cal/gmol/K) = 35
Panas penguapan A (cal/gmol) ..... = 7000
Panas penguapan B (cal/gmol) ..... = 8000
Panas penguapan C (cal/gmol) ..... = 9000
Panas yang dimasukkan (cal/menit) = 500000
Suhu perkiraan (K) ..... = 375
Fraksi cairan perkiraan ..... = 0.5
Toleransi suhu ..... = 0.0001
Toleransi fraksi cairan ..... = 0.00001
Interval diferensiasi suhu ..... = 0.0001
Interval diferensiasi fraksi cairan = 0.00001

```

Hasil hitungan:

```

-----
Suhu embun      = 382.3388 K
Jumlah uap      = 59.02648 gmol/menit
Jumlah cairan   = 40.97352 gmol/menit

```

Komposisi uap:

```

ya = 0.5580021
yb = 0.297222
yc = 0.1447794

```

Komposisi cair :

```

xa = 0.1723915
xb = 0.3040019
xc = 0.5236049

```

--selesai--

Ok

Soal 30:

Selesaikan kasus yang sama dengan soal nomor 29 dengan menggunakan cara Newton-Raphson multidimensi untuk persamaan simultan (subbab 4.11).

Jawaban:

Persamaan matematis sama dengan soal nomor 29. Persamaan-persamaan tersebut disesuaikan dengan Newton-Raphson simultan:

$$f_1 = Q + F.H_F - V.H_V - L.H_L = 0$$

$$f_2 = \sum (x_i) - 1 = 0$$

dengan *unknowns* T dan L/F . Persamaan-persamaan pendukung lainnya tetap. Dengan program mirip dengan pada subbab 4.11, diperoleh keluaran program komputer berikut:

Proses iterasi:

T (K)	L/F	f1	f2
375	0.500	110190.4	4.962635E-2
382.9891	0.4130426	-2948.625	-0.0107736
382.3541	0.4086506	-769.5625	-3.284216E-4
382.3369	0.4097301	12.125	2.896786E-5
382.339	0.4097335	-1.5625	-2.324581E-6
382.3388	0.4097338	0.3125	7.152558E-7

Hasil hitungan:

Suhu embun = 382.3388 K
Jumlah uap = 59.02661 gmol/menit
Jumlah cairan = 40.97339 gmol/menit

Komposisi uap :

ya = 0.5579961
yb = 0.2972223
yc = 0.1447817

Komposisi cair :

xa = 0.1723895
xb = 0.3040016
xc = 0.5236088

--selesai--

Ok.

CONTOH-CONTOH PROGRAM DALAM BAHASA FORTRAN

Dalam bab ini, ditunjukkan versi FORTRAN dan hasil hitungan sejumlah program MATLAB yang ada dalam Bab 4.

1. Diferensial Numeris

Program untuk mencari harga turunan dari:

$$y = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^2 + 1 \quad (7.1)$$

pada titik $x = 2$, secara numeris dengan cara sentral.

```
C  BAB 4.1
C  DIFERENSIASI NUMERIS CARA SENTRAL
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 8 OKTOBER 2019
C  NILAI X
  X0=2.
C  INTERVAL DIFERENSIASI
  EPS=0.01
  X=X0+EPS
  CALL FUNGSI(X,Y)
  YPLUS=Y
  X=X0-EPS
  CALL FUNGSI(X,Y)
  YMIN=Y
  DYDX=(YPLUS-YMIN)/2./EPS
C  PRINT HASIL
  WRITE(*,5) X0
  5 FORMAT(/2X,'NILAI X =',F9.6)
  WRITE(*,10) EPS
  10 FORMAT(2X,'EPS   =',F9.6)
  WRITE(*,15) DYDX
  15 FORMAT(2X,'DYDX  =',F9.6/)
  STOP
  END

  SUBROUTINE FUNGSI(X,Y)
  Y=X**3/3.+X**2/4.+1.
  RETURN
  END
```

Keluaran program komputer:

```
NILAI X   = 2.000000
EPS        = 0.010000
DYDX       = 5.000019
```


2. Integrasi Numeris Cara Trapezoidal

Program untuk menghitung:

$$\int_{x_0}^{x_n} y \cdot dx$$

dengan

$$y = e^x + \sqrt{x} \quad (7.2)$$

secara numeris dengan *trapezoidal rule*.

```
C  BAB 4.2A
C  INTEGRASI NUMERIS DENGAN TRAPEZOIDAL RULE
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 8 OKTOBER 2019
C  BATAS BAWAH INTEGRASI
    X0=1.
C  BATAS ATAS INTEGRASI
    XN=3.
C  JUMLAH INTERVAL INTEGRASI
    NINT=40
    DELX=(XN-X0)/FLOAT(NINT)
C  PERHITUNGAN DENGAN TRAPEZOIDAL RULE
    AREA=0.
    X=X0
    CALL FUNGSI(X,Y)
    AREA=AREA+Y
    DO 200, I=1,NINT-1
      X=X0+FLOAT(I)*DELX
      CALL FUNGSI(X,Y)
      Y=2.*Y
      AREA=AREA+Y
200 CONTINUE
    X=XN
    CALL FUNGSI(X,Y)
    AREA=AREA+Y
    AREA=AREA*DELX/2.
C  PRINT HASIL
    WRITE(*,60) X0
60  FORMAT(/2X,"BATAS BAWAH INTEGRASI  = ",F8.4)
    WRITE(*,70) XN
70  FORMAT(2X,"BATAS ATAS INTEGRASI  = ",F8.4)
    WRITE(*,80) NINT
80  FORMAT(2X,"JUMLAH INTERVAL INTEGRASI = ",I8)
    WRITE(*,90)
90  FORMAT(/2X,"HASIL HITUNGAN:")
    WRITE(*,100) AREA
100 FORMAT(2X,"INTEGRAL = ",F10.6/)
    STOP
    END
```

```
SUBROUTINE FUNGSI(X,Y)
Y=EXP(X)+SQRT(X)
RETURN
END
```

Keluaran program komputer:

BATAS BAWAH INTEGRASI = 1.0000

BATAS ATAS INTEGRASI = 3.0000

JUMLAH INTERVAL INTEGRASI = 40

HASIL HITUNGAN:

INTEGRAL = 20.168264

3. Integrasi Numeris Cara Simpson

Sama dengan nomor 2, tetapi memakai cara Simpson.

```
C  BAB 4.2B
C  INTEGRASI NUMERIS DENGAN CARA SIMPSON
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 8 OKTOBER 2019
C  BATAS BAWAH INTEGRASI
C  X0=1.
C  BATAS ATAS INTEGRASI
C  XN=3.
C  JUMLAH INTERVAL INTEGRASI (GENAP)
C  NINT=40
C  DELX=(XN-X0)/FLOAT(NINT)
C  PERHITUNGAN DENGAN TRAPEZOIDAL RULE
C  AREA=0.
C  X=X0
C  CALL FUNGSI(X,Y)
C  AREA=AREA+Y
C  DO 200, I=1,NINT-1
C  X=X0+FLOAT(I)*DELX
C  CALL FUNGSI(X,Y)
C  Y=2.*Y
C  IF((-1)**I.LT. 0) Y=2.*Y
C  AREA=AREA+Y
```

```

200 CONTINUE
    X=XN
    CALL FUNGSI(X,Y)
    AREA=AREA+Y
    AREA=AREA*DELX/3.
C   PRINT HASIL
    WRITE(*,60) X0
60  FORMAT(/2X,"BATAS BAWAH INTEGRASI   = ",F8.4)
    WRITE(*,70) XN
70  FORMAT(2X,"BATAS ATAS INTEGRASI    = ",F8.4)
    WRITE(*,80) NINT
80  FORMAT(2X,"JUMLAH INTERVAL INTEGRASI = ",I8)
    WRITE(*,90)
90  FORMAT(/2X,"HASIL HITUNGAN:")
    WRITE(*,100) AREA
100 FORMAT(2X,"INTEGRAL = ",F10.6/)
    STOP
    END

    SUBROUTINE FUNGSI(X,Y)
    Y=EXP(X)+SQRT(X)
    RETURN
    END

```

Keluaran program komputer:

BATAS BAWAH INTEGRASI = 1.0000

BATAS ATAS INTEGRASI = 3.0000

JUMLAH INTERVAL INTEGRASI = 40

HASIL HITUNGAN:

INTEGRAL = 20.164692

4. *Bisection*

Program untuk mencari akar dari persamaan non-linier

$$f(x) = x^3 - 8 = 0 \quad (7.3)$$

dengan cara *bisection*

```

C   BAB 4.3A
C   Mencari akar  $F(X)=0$  dengan bisection
C   Oleh WBS dan AP
C   Yogyakarta, 8 Oktober 2019
C   Batas bawah interval
    XA=1.
C   Batas atas interval
    XB=6.
C   Toleransi
    TOL=0.0001
    X=XA
    CALL FUNGSI(X,FX)
    FXA=FX
    X=XB
    CALL FUNGSI(X,FX)
    FXB=FX
    IF((FXA*FXB) .LE. 0.) GOTO 60
    WRITE(*,50)
50  FORMAT(/2X,"Interval salah!!!"/)
    GOTO 380
60  WRITE(*,70)
70  FORMAT(/2X,"          XA          XB          FXA          FXB")
    WRITE(*,80)
80  FORMAT(2X,"          -----          -----          -----          ----- ")
200 WRITE(*,220) XA,XB,FXA,FXB
220 FORMAT(1X,F11.6,2X,F11.6,2X,F12.7,2X,F12.7)
    IF(ABS(FXA) .LT. 1.E-8) THEN
        X=XA
        FX=FXA
        GOTO 320
    ENDIF
    IF(ABS(FXB) .LT. 1.E-8) THEN
        X=XB
        FX=FXB
        GOTO 320
    ENDIF
    IF((XB-XA) .LT. TOL) GOTO 300
    XM=(XA+XB)/2.
    X=XM
    CALL FUNGSI(X,FX)
    FXM=FX
    IF((FXA*FXM) .LT. 0.) GOTO 240
    XA=XM
    FXA=FXM
    GOTO 200
240  XB=XM
    FXB=FXM
    GOTO 200
300  X=(XA+XB)/2.
320  CALL FUNGSI(X,FX)
    WRITE(*,80)

```

```

WRITE(*,340) X
340 FORMAT(/2X,"AKAR PERSAMAAN = ",F10.6)
WRITE(*,350) FX
350 FORMAT(/2X,"FX = ",F10.6/)
380 STOP
END

SUBROUTINE FUNGSI(X,Y)
Y=X**3-8.
RETURN
END

```

Keluaran program komputer:

XA	XB	FXA	FXB
-----	-----	-----	-----
1.000000	6.000000	-7.0000000	208.0000000
1.000000	3.500000	-7.0000000	34.8750000
1.000000	2.250000	-7.0000000	3.3906250
1.625000	2.250000	-3.7089844	3.3906250
1.937500	2.250000	-0.7268066	3.3906250
1.937500	2.093750	-0.7268066	1.1785583
1.937500	2.015625	-0.7268066	0.1889687
1.976563	2.015625	-0.2779670	0.1889687
1.996094	2.015625	-0.0467835	0.1889687
1.996094	2.005859	-0.0467835	0.0705187
1.996094	2.000977	-0.0467835	0.0117245
1.998535	2.000977	-0.0175653	0.0117245
1.999756	2.000977	-0.0029293	0.0117245
1.999756	2.000366	-0.0029293	0.0043953
1.999756	2.000061	-0.0029293	0.0007324
1.999908	2.000061	-0.0010986	0.0007324
1.999985	2.000061	-0.0001831	0.0007324
-----	-----	-----	-----

AKAR PERSAMAAN = 2.000023

FX = 0.000275

5. Newton-Raphson dengan Diferensiasi Analitis

Sama dengan nomor 4, hanya dipakai cara Newton-Raphson dengan diferensiasi analitis.

```
C  BAB 4.3B1
C  Mencari akar  $F(X)=0$  dengan Newton-Raphson
C  Oleh WBS dan AP
C  Yogyakarta, 8 Oktober 2019
C  Harga awal  $X$  tebakan
    XOLD=1.
C  Toleransi
    TOL=0.0001
    WRITE(*,20) XOLD
20  FORMAT(/2X,"HARGA AWAL  $X =$ ",F10.5)
    WRITE(*,30) TOL
30  FORMAT(2X,"TOLERANSI  $X =$ ",F10.5/)
    WRITE(*,40)
40  FORMAT(2X,"    XOLD           $F(XOLD)$ ")
    WRITE(*,50)
50  FORMAT(2X, "-----  -----")
60  X=XOLD
    CALL FUNGSI(X,FX,DFDX)
    WRITE(*,70) X,FX
70  FORMAT(2X,F12.8,4X,F12.8)
    XNEW=XOLD-FX/DFDX
    IF(ABS(XNEW-XOLD) .LT. TOL) GOTO 200
    XOLD=XNEW
    GOTO 60
200 X=XNEW
    CALL FUNGSI(X,FX,DFDX)
    WRITE(*,50)
    WRITE(*,220) XNEW
220 FORMAT(/2X,"  $X =$ ",F10.6)
    WRITE(*,230) FX
230 FORMAT(2X,"  $F(X) =$ ",F10.6/)
    STOP
    END

    SUBROUTINE FUNGSI(X,FX,DFDX)
    FX=X**3-8.
    DFDX=3.*X**2
    RETURN
    END
```

Keluaran program komputer:

HARGA AWAL $X =$ 1.00000

TOLERANSI $X =$ 0.00010

XOLD	F(XOLD)
1.00000000	-7.00000000
3.33333325	29.03703499
2.46222210	6.92731428
2.08134127	1.01633179
2.00313759	0.03771016
2.00000501	0.00006008

X	=	2.000000
F(X)	=	0.000000

6. Newton-Raphson dengan Diferensiasi Numeris

Sama dengan nomor 5, hanya dipakai cara Newton-Raphson dengan diferensiasi numeris cara sentral.

```

C  BAB 4.3B2
C  Mencari akar F(X)=0 dengan Newton-Raphson
C  menggunakan diferensiasi numeris cara sentral
C  oleh WBS dan AP
C  Yogyakarta, 8 Oktober 2019
C  Harga awal X tebakan
XOLD=1.
C  Toleransi
TOL=0.0001
C  Interval untuk diferensiasi numeris
EPS=0.0001
WRITE(*,20) XOLD
20 FORMAT(/2X,"HARGA AWAL X      =",F10.5)
WRITE(*,30) TOL
30 FORMAT(2X,"TOLERANSI X      =",F10.5)
WRITE(*,40) EPS
40 FORMAT(2X,"INTERVAL DIFERENSIASI =",F10.5/)
WRITE(*,50)
50 FORMAT(2X,"      XOLD      F(XOLD) ")
WRITE(*,60)
60 FORMAT(2X,"      -----      -----")
70 X=XOLD
CALL FUNGSI(X,FX)
WRITE(*,80) X,FX
80 FORMAT(2X,F12.8,4X,F12.8)
FXOLD=FX

```

```

C   DIFERENSIASI NUMERIS CARA SENTRAL
    X=XOLD+EPS
    CALL FUNGSI(X,FX)
    FXB=FX
    X=XOLD-EPS
    CALL FUNGSI(X,FX)
    FXD=FX
    DFDX=(FXB-FXD)/2./EPS
    XNEW=XOLD-FXOLD/DFDX
    IF(ABS(XNEW-XOLD) .LT. TOL) GOTO 200
    XOLD=XNEW
    GOTO 70
200 X=XNEW
    CALL FUNGSI(X,FX)
    WRITE(*,80) X,FX
    WRITE(*,60)
    WRITE(*,220) XNEW
220 FORMAT(/2X," X  =",F10.6)
    WRITE(*,230) FX
230 FORMAT(2X," F(X) =",F10.6/)
    STOP
    END

    SUBROUTINE FUNGSI(X,FX)
    FX=X**3-8.
    RETURN
    END

```

Keluaran program komputer adalah:

```

HARGA AWAL X           =  1.00000
TOLERANSI X             =  0.00010
INTERVAL DIFERENSIASI  =  0.00010

```

XOLD	F(XOLD)
-----	-----
1.00000000	-7.00000000
3.33387351	29.05504608
2.46141005	6.91254997
2.08072019	1.00826263
2.00301051	0.03618054
2.00000143	0.00001717
2.00000000	0.00000000
-----	-----

$$X = 2.000000$$

$$F(X) = 0.000000$$

7. Optimasi dengan *Golden Section*

Program minimasi untuk:

$$y = 2x^2 - 8x + 12 \quad (7.4)$$

dengan cara *golden section*

```

C   BAB 4.4A
C   MINIMASI SINGLE VARIABLE DENGAN GOLDEN-SECTION
C   OLEH WBS DAN AP
C   YOGYAKARTA, 10 OKTOBER 2019
C   BATAS BAWAH X
      XA=0.
C   BATAS ATAS X
      XB=4.
C   TOLERANSI X
      TOL=0.001
C   TETAPAN GOLDEN-SECTION
      AL=(SQRT(5.)-1.)/2.
      WRITE(*,20) XA
20  FORMAT(/2X,"BATAS BAWAH X      = ",F10.5)
      WRITE(*,30) XB
30  FORMAT(2X,"BATAS ATAS X      = ",F10.5)
      WRITE(*,40) TOL
40  FORMAT(2X,"TOLERANSI X      = ",F10.5/)
      X=XA
      CALL FUNGSI(X,FX)
      FA=FX
      X=XB
      CALL FUNGSI(X,FX)
      FB=FX
      XP=XA+(1.-AL)*(XB-XA)
      X=XP
      CALL FUNGSI(X,FX)
      FP=FX
      XQ=XA+AL*(XB-XA)
      X=XQ
      CALL FUNGSI(X,FX)
      FQ=FX
      WRITE(*,50)
50  FORMAT(/2X,"   XA      XB      FA      FB")
      WRITE(*,60)
60  FORMAT(2X,-----,-----,-----,-----")
70  WRITE(*,80)XA,XB,FA,FBS
80  FORMAT(2X,F10.5,4X,F10.5,4X,F10.5,4X,F10.5)

```

```

      IF((XB-XA) .LT. TOL) GOTO 500
      IF(FP .LE. FQ) GOTO 300
      XA=XP
      FA=FP
      XP=XQ
      FP=FQ
      IF((XB-XA) .LT. TOL) GOTO 70
      XQ=XA+AL*(XB-XA)
      X=XQ
      CALL FUNGSI(X,FX)
      FQ=FX
      GOTO 70
300  XB=XQ
      FB=FQ
      XQ=XP
      FQ=FP
      IF((XB-XA) .LT. TOL) GOTO 70
      XP=XA+(1.-AL)*(XB-XA)
      X=XP
      CALL FUNGSI(X,FX)
      FP=FX
      GOTO 70
500  X=(XA+XB)/2.
      CALL FUNGSI(X,FX)
      WRITE(*,60)
      WRITE(*,220) X
220  FORMAT(/2X," X OPTIMUM  = ",F12.6)
      WRITE(*,230) FX
230  FORMAT(2X," F(X) OPTIMUM = ",F12.6/)
      STOP
      END

      SUBROUTINE FUNGSI(X,FX)
      FX=2.*X**2-8.*X+12.
      RETURN
      END

```

Keluaran program komputer:

XA	XB	FA	FB
-----	-----	-----	-----
0.00000	4.00000	12.00000	12.00000
0.00000	2.47214	12.00000	4.44582
0.94427	2.47214	6.22912	4.44582
1.52786	2.47214	4.44582	4.44582
1.52786	2.11146	4.44582	4.02485
1.75078	2.11146	4.12423	4.02485

1.88854	2.11146	4.02485	4.02485
1.88854	2.02631	4.02485	4.00138
1.94117	2.02631	4.00692	4.00138
1.97369	2.02631	4.00138	4.00138
1.97369	2.00621	4.00138	4.00008
1.98611	2.00621	4.00039	4.00008
1.99379	2.00621	4.00008	4.00008
1.99379	2.00147	4.00008	4.00000
1.99672	2.00147	4.00002	4.00000
1.99853	2.00147	4.00000	4.00000
1.99853	2.00035	4.00000	4.00000
1.99923	2.00035	4.00000	4.00000
1.99965	2.00035	4.00000	4.00000
-----	-----	-----	-----

X OPTIMUM = 2.000000

F(X) OPTIMUM = 4.000000

8. Optimasi dengan Hooke-Jeeves

Program minimasi untuk:

$$y = (x_1 - 3)^2 + 0,25(x_2 - 5)^2 + 7,5 \quad (7.5)$$

dengan cara Hooke-Jeeves.

```

C  BAB 4.5
C  MINIMASI DUA VARIABLE DENGAN HOOKE-JEEVES
C  F(X1,X2)=(X1-3.)**2+0.25*(X2-5.)**2+7.5
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 25 FEBRUARI 2020
C  HARGA AWAL X1:
C  X1OPT=1.
C  HARGA AWAL X2:
C  X2OPT=7.
C  DELTA X1:
C  DELX1=0.1
C  DELTA X2:
C  DELX2=0.1
C  TOLERANSI X1:
C  TOLX1=0.001
C  TOLERANSI X2:
C  TOLX2=0.001

```

```

C   PERBANDINGAN DELTA BARU DAN LAMA:
    RATIO=0.6
    WRITE(*,50)
50  FORMAT(/5X,'X1',10X,'X2',8X,'F(X1,X2)')
    WRITE(*,60)
60  FORMAT(2X,'-----',4X,'-----',5X,'-----')
C   TITIK AWAL:
    CALL FUNGSI(X1OPT,X2OPT,FOPT)
    WRITE(*,70) X1OPT,X2OPT,FOPT
70  FORMAT(1X,F9.6,3X,F9.6,4X,F10.6)
C   EXPLORASI:
210 TANDA1=0.
    TANDA2=0.
    X1=X1OPT+DELX1
    CALL FUNGSI(X1,X2OPT,F)
    IF(F .GE. FOPT) GOTO 280
    FOPT=F
    X1OPT=X1
    TANDA1=1.
    WRITE(*,70) X1OPT,X2OPT,FOPT
    GOTO 320
280 X1=X1OPT-DELX1
    CALL FUNGSI(X1,X2OPT,F)
    IF(F .GE. FOPT) GOTO 320
    FOPT=F
    X1OPT=X1
    TANDA1=-1.
    WRITE(*,70) X1OPT,X2OPT,FOPT
    GOTO 410
320 X2=X2OPT+DELX2
    CALL FUNGSI(X1OPT,X2,F)
    IF(F .GE. FOPT) GOTO 370
    FOPT=F
    X2OPT=X2
    TANDA2=1.
    WRITE(*,70) X1OPT,X2OPT,FOPT
    GOTO 410
370 X2=X2OPT-DELX2
    CALL FUNGSI(X1OPT,X2,F)
    IF(F .GE. FOPT) GOTO 410
    FOPT=F
    X2OPT=X2
    TANDA2=-1.
    WRITE(*,70) X1OPT,X2OPT,FOPT
410 IF(ABS(TANDA1) .GT. 0.2) GOTO 470
    IF(ABS(TANDA2) .GT. 0.2) GOTO 470
    IF(DELX1 .LT. TOLX1 .AND. DELX2 .LT. TOLX2) GOTO 490
C   MENGECEK DELTA LALU KEMBALI KE EXPLORASI
    DELX1=RATIO*DELX1
    DELX2=RATIO*DELX2
    GOTO 210
C   MENGULANG LANGKAH SUKSES
470 X1=X1OPT+TANDA1*DELX1

```

```

      X2=X2OPT+TANDA2*DELX2
      CALL FUNGSI(X1,X2,F)
      IF(F.GE. FOPT) GOTO 210
      X1OPT=X1
      X2OPT=X2
      FOPT=F
      WRITE(*,70) X1OPT,X2OPT,FOPT
      GOTO 470
490  WRITE(*,60)
C    CETAK HASIL:
      CALL FUNGSI(X1OPT,X2OPT,F)
      WRITE(*,500)
500  FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN:')
      WRITE(*,510)
510  FORMAT(2X,'-----:')
      WRITE(*,520) X1OPT
520  FORMAT(5X,'X1-OPTIMUM = ',F9.6)
      WRITE(*,530) X2OPT
530  FORMAT(5X,'X2-OPTIMUM = ',F9.6)
      WRITE(*,540) F
540  FORMAT(5X,'F-MINIMUM = ',F9.6/)
      STOP
      END

      SUBROUTINE FUNGSI(X1,X2,F)
      F=(X1-3.)*2+0.25*(X2-5.)*2+7.5
      RETURN
      END

```

Keluaran program komputer:

X1	X2	F(X1,X2)
-----	-----	-----
1.000000	7.000000	12.500000
1.100000	7.000000	12.110000
1.100000	6.900000	12.012500
1.200000	6.800000	11.550000
1.300000	6.700000	11.112500
1.400000	6.600000	10.700000
1.500000	6.500000	10.312500
1.600000	6.400001	9.950000
1.700000	6.300001	9.612500
1.800000	6.200001	9.300000

1.900000	6.100001	9.012500
2.000000	6.000001	8.750000
2.100000	5.900001	8.512500
2.200000	5.800001	8.300000
2.300000	5.700001	8.112500
2.400000	5.600001	7.950001
2.500000	5.500001	7.812500
2.600000	5.400002	7.700001
2.700000	5.300002	7.612501
2.799999	5.200002	7.550000
2.899999	5.100002	7.512500
2.999999	5.000002	7.500000

HASIL HITUNGAN :

-----;

X1-OPTIMUM = 2.999999

X2-OPTIMUM = 5.000002

F-MINIMUM = 7.500000

9. Persamaan Linier

Program untuk menyelesaikan N persamaan linier dengan N bilangan tak diketahui dengan *gaussian elimination*, disertai *maximum column pivoting*, diikuti *backward substitution*.

```

C  BAB 4.6
C  PENYELESAIAN PERSAMAAN LINIER SIMULTAN
C  ELIMINASI GAUSS DENGAN MAXIMUM COLUMN PIVOTING
C  DIKUTI BACKWARD SUBSTITUTION
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 25 FEBRUARI 2020
C  BAB 4.6
C  PENYELESAIAN PERSAMAAN LINIER SIMULTAN
C  ELIMINASI GAUSS DENGAN MAXIMUM COLUMN PIVOTING
C  DIKUTI BACKWARD SUBSTITUTION
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 25 FEBRUARI 2020
C  DIMENSION A(20,20),B(20),X(20)

```

```

C   ELEMEN-ELEMEN MATRIX
    DATA (A(1,J),J=1,5)/1.,1.,1.,1.,1./
    DATA (A(2,J),J=1,5)/1.,0.,2.,-1.,1./
    DATA (A(3,J),J=1,5)/2.,-1.,-1.,1.,-1./
    DATA (A(4,J),J=1,5)/0.,1.,-1.,0.,2./
    DATA (A(5,J),J=1,5)/1.,2.,1.,-1.,0./
    DATA (B(I),I=1,5)/2.,-1.,7.,-9.,-2./
C   JUMLAH BILANGAN TAK DIKETAHUI
    N=5
C   MAXIMUM COLUMN PIVOTING DAN ELIMINASI
    DO 400,I=1,N-1
C   PIVOTING
    IMAX=I
    DO 100, IPIV=I+1,N
    IF(ABS(A(IPIV,I)) .GT. ABS(A(IMAX,I))) IMAX=IPIV
100 CONTINUE
C   TUKAR BARIS I DENGAN IMAX
    DO 150, L=1,N
    ASIMP=A(I,L)
    A(I,L)=A(IMAX,L)
    A(IMAX,L)=ASIMP
150 CONTINUE
    BSIMP=B(I)
    B(I)=B(IMAX)
    B(IMAX)=BSIMP
C   ELIMINASI
    DO 200, IBAR=I+1,N
    RATIO=A(IBAR,I)/A(I,I)
    DO 170, IKOL=I,N
    A(IBAR,IKOL)=A(IBAR,IKOL)-RATIO*A(I,IKOL)
170 CONTINUE
    B(IBAR)=B(IBAR)-RATIO*B(I)
200 CONTINUE
400 CONTINUE
C   BACKWARD SUBSTITUTION
    X(N)=B(N)/A(N,N)
    DO 500, I=N-1,1,-1
    AX=0.
    DO 450, J=I+1,N
    AX=AX+A(I,J)*X(J)
450 CONTINUE
    X(I)=(B(I)-AX)/A(I,I)
500 CONTINUE
C   CETAK HASIL
    WRITE(*,600)
600 FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN:')
    WRITE(*,610)
610 FORMAT(2X,'-----')
    DO 650, I=1,N
    WRITE(*,700) I,X(I)
650 CONTINUE

```

```

700 FORMAT(5X,'X(',I2,') = ',F11.6)
    WRITE(*,800)
800 FORMAT(/2X,'SELESAI! '/')
    STOP
    END

```

Keluaran program komputer:

HASIL HITUNGAN:

```

-----
X( 1) =  1.000000
X( 2) = -1.000000
X( 3) =  2.000000
X( 4) =  3.000000
X( 5) = -3.000000

```

SELESAI!

10. Regresi Polinomial

Program untuk mencari persamaan pendekatan empiris berbentuk polinomial order- n .

```

C  BAB 4.7.D
C  REGRESI POLINOMIAL
C  OLEH WBS DAN AP
C  YOGYAKARTA, 25 FEBRUARI 2020
C  DIMENSION X(30),Y(30),YREG(30),
A    SUMX(61),SUMYX(31),A(31),B(31,32)
C  A(I)=KOEFSIEN POLINOMIAL
C  B(I,J)=KOEFSIEN MATRIX (RUAS KANAN DIBERI NOTASI B(I,NPERS+1))
C  DATA (X(I), I=1,10)/2.2, 3.8, 13.1, 16.9, 20.6, 24.25,
A    26., 31.4, 32.7, 35.9/
C  DATA (Y(I), I=1,10)/11., 13.45, 25.3, 29.7, 33.65, 36.6,
A    38.41, 42.68, 43.45, 45.75/
C  ORDER POLINOMIAL
C  N=3
C  JUMLAH DATA
C  JD=10
C  MENGHITUNG SUMX(J)
C  DO 50,J=1,2*N+1
C  SUMX(J)=0.
C  DO 30, I=1,JD

```



```

SUMX(J)=SUMX(J)+X(I)**(J-1)
30 CONTINUE
50 CONTINUE
C   MENGHITUNG SUMYX(J)
DO 70, J=1,N+1
SUMYX(J)=0.
DO 60, I=1,JD
SUMYX(J)=SUMYX(J)+X(I)**(J-1)*Y(I)
60 CONTINUE
70 CONTINUE
C   MEMBENTUK MATRIX B(I,J)
C   RUAS KANAN ADALAH B(I,N+2)
DO 90, I=1,N+1
DO 80, J=1,N+1
B(I,J)=SUMX(I+J-1)
80 CONTINUE
90 CONTINUE
DO 100, I=1,N+1
B(I,N+2)=SUMYX(I)
100 CONTINUE
C   MAXIMUM COLUMN PIVOTING DAN ELIMINASI
DO 400,I=1,N
C   PIVOTING
IMAX=I
DO 120, IPIV=I+1,N+1
IF(ABS(B(IPIV,I)) .GT. ABS(B(IMAX,I))) IMAX=IPIV
120 CONTINUE
C   TUKAR BARIS I DENGAN IMAX
DO 150, L=I,N+2
BSIMP=B(I,L)
B(I,L)=B(IMAX,L)
B(IMAX,L)=BSIMP
150 CONTINUE
C   ELIMINASI
DO 200, IBAR=I+1,N+1
RATIO=B(IBAR,I)/B(I,I)
DO 170, IKOL=I+1,N+2
B(IBAR,IKOL)=B(IBAR,IKOL)-RATIO*B(I,IKOL)
170 CONTINUE
200 CONTINUE
400 CONTINUE
C   BACKWARD SUBSTITUTION
A(N+1)=B(N+1,N+2)/B(N+1,N+1)
DO 500, I=N,1,-1
A(I)=B(I,N+2)
DO 450, J=I+1,N+1
A(I)=A(I)-B(I,J)*A(J)
450 CONTINUE
A(I)=A(I)/B(I,I)
500 CONTINUE
C   MENGHITUNG Y DENGAN PERSAMAAN POLINOMIAL
DO 550,I=1,JD
YREG(I)=0.

```

```

        DO 540, K=0,N
        YREG(I)=YREG(I)+A(K+1)*X(I)**K
540 CONTINUE
550 CONTINUE
C    CETAK HASIL
    WRITE(*,560)
560 FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN:')
    WRITE(*,570)
570 FORMAT(2X,'-----')
    WRITE(*,580)
580 FORMAT(/2X,
A    'PERSAMAAN: Y=A(0)+A(1)*X+A(2)*X**2+...+A(N)*X**N ')
    DO 590, I=0,N
    WRITE(*,600) I,A(I+1)
590 CONTINUE
600 FORMAT(4X,'A(',I1,') = ',E13.6)
    WRITE(*,650)
650 FORMAT(/3X,'X(I)',12X,'YDATA(I)',12X,'YCALC(I)')
    WRITE(*,660)
660 FORMAT(3X,'---',12X,'-----',12X,'-----')
    DO 670,I=1,JD
    WRITE(*,680) X(I),Y(I),YREG(I)
670 CONTINUE
680 FORMAT(3X,F5.2,9X,F11.6,9X,F11.6)
    WRITE(*,800)
800 FORMAT(/2X,'SELESAI! '/')
    STOP
    END

```

Keluaran program komputer:

HASIL HITUNGAN:

PERSAMAAN: $Y=A(0)+A(1)*X+A(2)*X**2+...+A(N)*X**N$

$A(0) = 0.770434E+01$

$A(1) = 0.155256E+01$

$A(2) = -0.160673E-01$

$A(3) = 0.644937E-04$

X(I)	YDATA(I)	YCALC(I)
---	-----	-----
2.20	11.000000	11.042900
3.80	13.450000	13.375607
13.10	25.299999	25.430593

16.90	29.700001	29.664974
20.60	33.650002	33.432621
24.25	36.599998	36.825138
26.00	38.410000	38.343037
31.40	42.680000	42.609795
32.70	43.450001	43.547646
35.90	45.750000	45.717701

SELESAI!

11. Runge-Kutta

Program untuk penyelesaian persamaan diferensial ordiner order 1 simultan 2 baris, berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(xy)} + z^{0,3} \quad (7.6)$$

$$\frac{dz}{dx} = x + \sqrt{(yz)} \quad (7.7)$$

dengan cara Runge-Kutta

```

C   BAB 4.8.A
C   RUNGE-KUTTA UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDINER SIMULTAN
C   ORDER 1, 2 BARIS
C   OLEH WBS DAN AP, 21 FEBRUARI 2020
C   KEADAAN AWAL:
      X0=0.5
      Y0=1.
      Z0=0.8
C   TITIK AKHIR:
      XN=1.5
C   JUMLAH INTERVAL:
      N=10
      DELX=(XN-X0)/FLOAT(N)
      WRITE(*,30)
30  FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN:')
      WRITE(*,40)
40  FORMAT(2X,'-----')
      WRITE(*,50)
50  FORMAT(/5X,'X',14X,'Y',15X,'Z')
      WRITE(*,60)
60  FORMAT(4X,'-----',12X,'-----',13X,'-----')
70  WRITE(*,80)X0,Y0,Z0
80  FORMAT(2X,F6.3,6X,F11.6,5X,F11.6)
      IF(X0 .GT. XN) GOTO 290
      X=X0

```

```

Y=Y0
Z=Z0
CALL FUNGSI(X,Y,Z,F1,F2)
AK1=F1*DELX
AL1=F2*DELX
X=X0+DELX/2.
Y=Y0+AK1/2.
Z=Z0+AL1/2.
CALL FUNGSI(X,Y,Z,F1,F2)
AK2=F1*DELX
AL2=F2*DELX
Y=Y0+AK2/2.
Z=Z0+AL2/2.
CALL FUNGSI(X,Y,Z,F1,F2)
AK3=F1*DELX
AL3=F2*DELX
X=X0+DELX
Y=Y0+AK3
Z=Z0+AL3
CALL FUNGSI(X,Y,Z,F1,F2)
AK4=F1*DELX
AL4=F2*DELX
X0=X0+DELX
Y0=Y0+(AK1+2.*AK2+2.*AK3+AK4)/6.
Z0=Z0+(AL1+2.*AL2+2.*AL3+AL4)/6.
GOTO 70
290 WRITE(*,60)
    WRITE(*,300)
300 FORMAT(/2X,'SELESAI!' /)
    STOP
    END

SUBROUTINE FUNGSI(X,Y,Z,F1,F2)
    F1=SQRT(X*Y)+Z**0.3
    F2=X+SQRT(Y*Z)
    RETURN
    END

```

Keluaran program komputer:

HASIL HITUNGAN:

```

-----;
      X           Y           Z
-----
0.500    1.000000    0.800000
0.600    1.173268    0.952385
0.700    1.365195    1.132199
0.800    1.576664    1.341872
0.900    1.808546    1.583997

```

1.000	2.061701	1.861328
1.100	2.336977	2.176791
1.200	2.635212	2.533483
1.300	2.957237	2.934684
1.400	3.303876	3.383857
1.500	3.675951	3.884660
-----	-----	-----

SELESAI!

12. *Finite Difference Approximation* untuk Persamaan Diferensial Ordiner

Program untuk penyelesaian persamaan diferensial ordiner berbentuk:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - 2y = x \quad (7.8)$$

dengan *finite difference approximation*.

```

C  BAB 4.9
C  FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION
C  UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDINER
C  OLEH WBS DAN AP, 24 FEBRUARI 2020
C  DIMENSION(79),B(79),C(79),D(79),Y(81)
C  KONDISI BATAS KIRI:
C  X0=1.
C  Y0=0.4
C  KONDISI BATAS KANAN:
C  XN=2.
C  YN=0.8
C  JUMLAH INTERVAL:
C  N=10
C  DELX=(XN-X0)/FLOAT(N)
C  MENYUSUN MATRIX TRIDIAGONAL
C  A(1)=0.
C  B(1)=-2.-2.*DELX**2
C  C(1)=1.+1./(X0/DELX+1.)
C  D(1)=X0*DELX**2+DELX**3-(1.-1./(X0/DELX+1.))*Y0
C  DO 100, I=2,N-2
C  A(I)=1.-1./(X0/DELX+FLOAT(I))
C  B(I)=-2.-2.*DELX**2
C  C(I)=1.+1./(X0/DELX+FLOAT(I))
C  D(I)=X0*DELX**2+FLOAT(I)*DELX**3
100 CONTINUE
C  A(N-1)=1.-1./(X0/DELX+FLOAT(N)-
C  B(N-1)=-2.-2*DELX**2
C  C(N-1)=0.
C  D(N-1)=X0*DELX**2+(FLOAT(N)-1.)*DELX**3

```

```

      A    -(1.+1./(X0/DELX+FLOAT(N)-1.))*YN
C      PENYELESAIAN
C      ELIMINASI
      DO 200, I=2,N-1
      RATIO=A(I)/B(I-1)
      B(I)=B(I)-RATIO*C(I-1)
      D(I)=D(I)-RATIO*D(I-1)
200    CONTINUE
C      BACKWARD SUBSTITUTION
      Y(N-1)=D(N-1)/B(N-1)
      DO 300, I=N-2,1,-1
      Y(I)=(D(I)-C(I)*Y(I+1))/B(I)
300    CONTINUE
C      CETAK HASIL
      DO 320, I=N,2,-1
      Y(I)=Y(I-1)
320    CONTINUE
      Y(1)=Y0
      Y(N+1)=YN
      WRITE(*,350)
350    FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN:')
      WRITE(*,360)
360    FORMAT(2X,'-----')
      WRITE(*,370)
370    FORMAT(/6X,'X',14X,'Y')
      WRITE(*,380)
380    FORMAT(5X,'-----',12X,'-----')
      DO 400, I=0,N
      X=X0+FLOAT(I)*DELX
      WRITE(*,410) X,Y(I+1)
400    CONTINUE
410    FORMAT(3X,F6.3,7X,F11.6)
      WRITE(*,380)
      WRITE(*,420)
420    FORMAT(/2X,'SELESAI!'/)
      STOP
      END

```

Keluaran program komputer:

HASIL HITUNGAN:

```

-----
X          Y
-----
1.000      0.400000
1.100      0.351186
1.200      0.327029
1.300      0.323704

```

1.400	0.338936
1.500	0.371531
1.600	0.421080
1.700	0.487785
1.800	0.572347
1.900	0.675905
2.000	0.800000

SELESAI!

13. *Finite Difference Approximation* untuk Persamaan Diferensial Parsial Cara Implisit

Program untuk menyelesaikan persamaan diferensial berbentuk:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (7.9)$$

dengan *finite difference approximation* cara implisit.

```

C   BAB 4.10.B
C   FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION
C   UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
C   CARA IMPLISIT (BACKWARD)
C   OLEH WBS DAN AP, 24 FEBRUARI 2020
C   DIMENSION A(39),B(39),C(39),D(39),Y(41)
C   PANJANG ARAH X:
C   AL=1.
C   KONDISI AWAL:
C   YIN=0.5
C   KONDISI BATAS:
C   YA=1.
C   YB=0.2
C   JUMLAH INTERVAL:
C   N=10
C   MODULUS
C   AM=4.
C   BATAS J:
C   JEND=2
C   DELX=AL/FLOAT(N)
C   DELT=DELX**2/AM
C   SET KONDISI AWAL
C   DO 10, I=1,N+1
C   Y(I)=YIN

```

```

10 CONTINUE
   WRITE(*,20)
20 FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN:')
   WRITE(*,30)
30 FORMAT(2X,'-----')
   J=0
40 TIME=FLOAT(J)*DELT
   WRITE(*,50) J,TIME
50 FORMAT(/2X,'J = ',I2,' (T = ',F8.4,')')
   WRITE(*,60)
60 FORMAT(7X,'X',15X,'Y')
   WRITE(*,70)
70 FORMAT(6X,'-----',13X,'-----')
   DO 80, I=1,N+1
     IF(J .GT. 0 .AND. I .EQ. 1) Y(1)=YA
     IF(J .GT. 0 .AND. I .EQ. N+1) Y(N+1)=YB
     WRITE(*,90) FLOAT(I-1)*DELT,X,Y(I)
80 CONTINUE
90 FORMAT(4X,F6.3,7X,F11.6)
   WRITE(*,70)
   IF(J .GE. JEND) GOTO 270
C   MENGHITUNG Y PADA J BERIKUTNYA
C   SET MATRIX TRIDIAGONAL
   A(1)=0.
   B(1)=-AM-2.
   C(1)=1.
   D(1)=-AM*Y(2)-YA
   DO 150, I=2,N-2
     A(I)=1.
     B(I)=-AM-2.
     C(I)=1.
     D(I)=-AM*Y(I+1)
150 CONTINUE
   A(N-1)=1.
   B(N-1)=-AM-2.
   C(N-1)=0.
   D(N-1)=-AM*Y(N)-YB
C   PENYELESAIAN PERSAMAAN MATRIX TRIDIAGONAL
C   ELIMINASI
   DO 200, I=2,N-1
     RATIO=A(I)/B(I-1)
     B(I)=B(I)-RATIO*C(I-1)
     D(I)=D(I)-RATIO*D(I-1)
200 CONTINUE
C   BACKWARD SUBSTITUTION
   Y(N)=D(N-1)/B(N-1)
   DO 250, I=N-2,1,-1
     Y(I+1)=(D(I)-C(I)*Y(I+2))/B(I)
250 CONTINUE
   J=J+1
   GOTO 40

```



```
270 WRITE(*,300)
300 FORMAT(/2X,'SELESAI!'/)
STOP
END
```

Keluaran program komputer:

HASIL HITUNGAN:

J = 0 (T = 0.0000)

X	Y
-----	-----
0.000	0.500000
0.100	0.500000
0.200	0.500000
0.300	0.500000
0.400	0.500000
0.500	0.500000
0.600	0.500000
0.700	0.500000
0.800	0.500000
0.900	0.500000
1.000	0.500000
-----	-----

J = 1 (T = 0.0025)

X	Y
-----	-----
0.000	1.000000
0.100	0.585786
0.200	0.514718
0.300	0.502524
0.400	0.500426
0.500	0.500030

0.600	0.499753
0.700	0.498487
0.800	0.491169
0.900	0.448528
1.000	0.200000
-----	-----

J = 2 (T = 0.0050)

X	Y
-----	-----
0.000	1.000000
0.100	0.646446
0.200	0.535532
0.300	0.507875
0.400	0.501619
0.500	0.500135
0.600	0.499072
0.700	0.495284
0.800	0.478682
0.900	0.412132
1.000	0.200000
-----	-----

SELESAI!

14. Penyelesaian Persamaan Non-Linier Simultan

Program untuk metoda Newton-Raphson dalam rangka menyelesaikan persamaan non-linear simultan berbentuk (Burden, 1985):

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin(x_3) + 1,06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

adalah sebagai berikut:

```

C  TUGAS11
C  NEWTON-RAPHSON UNTUK PERSAMAAN SIMULTAN
C  OLEH WAHYUDI B. SEDIAWAN, 6 DESEMBER 1994
    DIMENSION X(5),F(5),XOLD(5),XNEW(5),Y(5),B(5),A(5,5),EPS(5),TOL(5)
    DATA (XOLD(I),I=1,3) / 0.1,0.1,-0.1 /
    DATA (EPS(I),I=1,3) / 0.001,0.001,0.001 /
    DATA (TOL(I),I=1,3) / 0.0001,0.0001,0.0001 /
    N=3
    WRITE(6,20)XOLD(1),XOLD(2),XOLD(3),EPS(1),EPS(2),EPS(3),
      A      TOL(1),TOL(2),TOL(3)
20  FORMAT(/2X,'HARGA AWAL X1 = ',F8.5/
      A      2X,'HARGA AWAL X2 = ',F8.5/
      A      2X,'HARGA AWAL X3 = ',F8.5/
      A      2X,'INTERVAL DIFERENSIASI KE X1 = ',F8.5/
      A      2X,'INTERVAL DIFERENSIASI KE X2 = ',F8.5/
      A      2X,'INTERVAL DIFERENSIASI KE X3 = ',F8.5/
      A      2X,'TOLERANSI X1 = ',F8.5/
      A      2X,'TOLERANSI X2 = ',F8.5/
      A      2X,'TOLERANSI X3 = ',F8.5)
    WRITE(6,40)
40  FORMAT(/'      X(1)      X(2)      X(3)      ERROR ')
    WRITE(6,50)
50  FORMAT(' -----  -----  -----  ----- ')
C  MENGHITUNG F(X) DAN ERROR
    DO 100 I=1,N
      X(I)=XOLD(I)
100  CONTINUE
      CALL FUNGSI(X,F)
      ERROR=0.
      DO 130 I=1,N
        B(I)=F(I)
        ERROR=ERROR+ABS(F(I))
130  CONTINUE
      WRITE(6,750) XOLD(1),XOLD(2),XOLD(3),ERROR
C  MENGHITUNG J(X)
140  DO 200 J=1,N
      DO 160 K=1,N
        X(K)=XOLD(K)
        IF(K.EQ. J) X(K)=X(K)+EPS(K)
160  CONTINUE
        CALL FUNGSI(X,F)
        DO 170 I=1,N
          A(I,J)=(F(I)-B(I))/EPS(J)
170  CONTINUE
200  CONTINUE
C  MENGHITUNG Y (N PERSAMAAN LINIER)
C  ELIMINASI
    DO 600 I=1,N-1
C  PIVOTING
      IMAX=I
      DO 300 IBAR=I+1,N

```

```

        IF(ABS(A(IBAR,I)) .GT. ABS(A(IMAX,I))) IMAX=IBAR
300  CONTINUE
C    TUKAR BARIS
        DO 340 IKOL=I,N
        ASIMP=A(I,IKOL)
        A(I,IKOL)=A(IMAX,IKOL)
        A(IMAX,IKOL)=ASIMP
340  CONTINUE
        BSIMP=B(I)
        B(I)=B(IMAX)
        B(IMAX)=BSIMP
C    ELIMINASI KOLOM I
        DO 400 IBAR=I+1,N
        RATIO=A(IBAR,I)/A(I,I)
        DO 370 IKOL=I+1,N
        A(IBAR,IKOL)=A(IBAR,IKOL)-RATIO*A(I,IKOL)
370  CONTINUE
        B(IBAR)=B(IBAR)-RATIO*B(I)
400  CONTINUE
600  CONTINUE
C    BACKWARD SUBSTITUTION
        Y(N)=B(N)/A(N,N)
        DO 650 I=N-1,1,-1
        Y(I)=B(I)
        DO 640 J=I+1,N
        Y(I)=Y(I)-A(I,J)*Y(J)
640  CONTINUE
        Y(I)=Y(I)/A(I,I)
650  CONTINUE
C    MENGHITUNG XNEW DAN ERROR
        DO 700 I=1,N
        XNEW(I)=XOLD(I)-Y(I)
700  CONTINUE
        MENGHITUNG ERROR DAN F(XOLD) BERIKUTNYA
        DO 720 I=1,N
        X(I)=XNEW(I)
720  CONTINUE
        CALL FUNGSI(X,F)
        ERROR=0.
        DO 730 I=1,N
        B(I)=F(I)
        ERROR=ERROR+ABS(F(I))
730  CONTINUE
        WRITE(6,750) XNEW(1),XNEW(2),XNEW(3),ERROR
750  FORMAT(2X,F8.5,2X,F8.5,2X,F8.5,2X,F8.5)
C    CEK APAKAH SUDAH KONVERGEN
        I=1
770  IF(ABS(XNEW(I)-XOLD(I)) .GT. TOL(I)) GOTO 800
        IF(I .GE. N) GOTO 900
        I=I+1
        GOTO 770

```

```

800 DO 850 I=1,N
    XOLD(I)=XNEW(I)
850 CONTINUE
    GOTO 140
C    CETAK HASIL
900 WRITE(6,910)
910 FORMAT(/2X,'HASIL HITUNGAN :')
    WRITE(6,920)
920 FORMAT(2X,'-----')
    DO 950 I=1,N
        WRITE(6,960) I,XNEW(I)
950 CONTINUE
960 FORMAT(5X,'X(',I2,') = ',F8.5)
    STOP
    END

    SUBROUTINE FUNGSI(X,F)
    DIMENSION X(5),F(5)
    F(1)=3.*X(1)-COS(X(2)*X(3))-0.5
    F(2)=X(1)**2-81.*(X(2)+0.1)**2+SIN(X(3))+1.06
    F(3)=EXP(-X(1)*X(2))+20.*X(3)+(10.*3.14159-3.)/3.
    RETURN

```

Keluaran program komputer:

HARGA AWAL X1 = 0.10000

HARGA AWAL X2 = 0.10000

HARGA AWAL X3 = -0.10000

INTERVAL DIFERENSIASI KE X1 = 0.00100

INTERVAL DIFERENSIASI KE X2 = 0.00100

INTERVAL DIFERENSIASI KE X3 = 0.00100

TOLERANSI X1 = 0.00010

TOLERANSI X2 = 0.00010

TOLERANSI X3 = 0.00010

X(1)	X(2)	X(3)	ERROR
-----	-----	-----	-----
0.10000	0.10000	-0.10000	11.93180
0.49987	0.01968	-0.52152	0.38055
0.50002	0.00170	-0.52355	0.02774

0.50000 0.00002 -0.52360 0.00036

0.50000 0.00000 -0.52360 0.00000

HASIL HITUNGAN :

$$X(1) = 0.50000$$

$$X(2) = 0.00000$$

$$X(3) = -0.52360$$